



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Centro Interdisciplinario de Investigación para el Desarrollo Integral  
Regional, Unidad Oaxaca

Maestría en Ciencias en Conservación y Aprovechamiento de  
Recursos Naturales (Ingeniería)

*DETERMINACIÓN DEL EPICENTRO DE UN SISMO POR  
MEDIO DEL  
ALGORITMO EM-DPD*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

HERNÁNDEZ SÁNCHEZ CÉSAR

DIRECTOR

Dr. Francisco Castellanos León

Santa cruz Xoxocotlán, Oaxaca, México.

Diciembre /2019

## **Agradecimientos**

Agradezco a Dios por la oportunidad de brindarme los tiempos para la realización de esta investigación, al CIIDIR-IPN por brindarme la gran oportunidad de ser parte de esta noble institución y recibirme como alumno del programa de la Maestría en Ciencias en Conservación y Aprovechamiento de Recursos Naturales, al CONACyT por el apoyo proporcionado para la realización de esta investigación, al CINVESTAV-GDL que me permitió crecer a nivel académico durante la estancia de investigación realizada en sus instalaciones, al Dr. José Bayro Corrochano - SNI III por su guía durante mi permanencia en el Instituto, al Instituto Nacional de Investigación para las Ciencias de la Tierra y Resiliencia ante Desastres (NIED - Japón) quien me facilitó los datos para realizar dicha investigación, por ultimo al doctor Francisco Castellanos León por la guía otorgada durante la realización de dicho proyecto.

## Resumen

Esta investigación determina el epicentro de un sismo a través del algoritmo EM-DPD propuesto por Tzoreff & Weiss (2017), así mismo, está basado en el algoritmo EM propuesto por Dempster, Laird, & Rubin (1977); la investigación inicial de Tzoreff & Weiss está enfocada a la localización de un misil. Para este proyecto, la posición del misil es asociada a la determinación del epicentro de un sismo. Esto es importante dentro del estudio de los sismos, ya que se puede aproximar la zona en la que podrían observarse mayores afectaciones que van desde daños estructurales hasta la pérdida de vidas humanas. Si bien, existen una gran variedad de métodos para aproximar el epicentro de un sismo, esta propuesta genera una localización más exacta, además de identificar características de la fuente y del medio de propagación.

En la determinación del epicentro por medio del algoritmo EM-DPD se utilizaron los registros sísmicos de la red K-Net de Japón, por el hecho de contar con una gran red de sensores distribuidos, aproximadamente cada 20 kilómetros. Las estaciones sísmicas que se toman en cuenta para el desarrollo de esta investigación son las cercanas al epicentro del sismo ocurrido en Japón el 14 de junio del 2008 con magnitud de 7.2 en la escala local.

Para la adaptación del algoritmo EM-DPD a los sismos se aplican las bases de las transformadas de Fourier, la transformada de Hilbert, en gran parte la estadística inferencial y las distribuciones gaussianas entre otras. Durante el desarrollo del método EM-DPD se propusieron los puntos semilla que dan pie a la aproximación del epicentro, tales puntos fueron las posiciones de 6 estaciones cercanas al epicentro, la dirección del movimiento utilizado es Este – Oeste, se obtuvieron sus transformadas correspondientes y se introdujeron al algoritmo. El resultado del cálculo de epicentro por medio del algoritmo fue en longitud  $x = 480,936$  m, y latitud  $y = 4,351,816$  m y el epicentro correspondientemente del evento proporcionado por la red K-NET de Japón es  $x$

= 489,613 m,  $y = 4,319,891$  m. La diferencia en línea recta es de 33,337 m; además, es sabido que el margen de error en el cálculo de los epicentros es de 20,000 km aproximadamente. Así mismo, se espera que al aumentar el número de señales correspondientes a las estaciones la aproximación del epicentro por el algoritmo EM-DPD sea más exacta.

### **Abstract**

This research determines the epicenter of an earthquake through the EM-DPD algorithm proposed by Tzoreff & Weiss (2017). It is also based on the EM algorithm proposed by Dempster, Laird, & Rubin (1977); Tzoreff & Weiss's initial proposal is focused on the location of a missile. For this project, the position of the missile is analog to the determination of the epicenter of an earthquake. This is important in the study of earthquakes, since it is possible to approximate the area in which greater effects might be observed, producing structural damage and also loss of human lives. Although there are a wide variety of methods to approximate the epicenter of an earthquake, this is a contribution that could provide a more exact location. It also identifies characteristics of the seismic source and the mean of propagation.

On determining the epicenter by the EM-DPD algorithm, the seismic records of the K-Net network of Japan were used, due to the fact that there is a large network of sensors approximately distributed every 20 kilometers. The seismic stations considered for this investigation are those near the epicenter of the earthquake occurred in Japan, on June 14<sup>th</sup>, 2008 with a magnitude of 7.2 on the local scale.

For the adaptation of the EM-DPD algorithm to the earthquakes, concepts such as: the Fourier transform, the Hilbert transform, inferential statistics and Gaussian distributions, among others, are applied.

During the development of the EM-DPD method, the seed points that give rise to the approach of the epicenter were proposed. Such points were the positions of 6 stations near the epicenter, the direction of the movement used is East - West. Their corresponding transforms were obtained and were introduced to the algorithm, finally the result of the algorithm was in  $x = 480,936$  m,  $y = 4,351,816$  m and the epicenter of the seismic event is  $x = 489,613$  m,  $y = 4,319,891$  m., with a difference in a straight line of 33,337 m, error which is within an acceptable margin in the calculation of the epicenter of approximately 20,000 km. Likewise, it is expected that by increasing the number of signals corresponding to the stations, the estimation of the epicenter by the EM-DPD algorithm will be more accurate.

## INDICE

<b>AGRADECIMIENTOS .....</b>	<b>IV</b>
<b>RESUMEN.....</b>	<b>V</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>VI</b>
<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>XI</b>
<b>PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....</b>	<b>XIII</b>
<b>OBJETIVO GENERAL .....</b>	<b>XIV</b>
OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	XIV
<b>HIPÓTESIS .....</b>	<b>XIV</b>
<b>JUSTIFICACIÓN .....</b>	<b>XV</b>
<b>CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES .....</b>	<b>1</b>
1.1 <i>Localización epicentral utilizando el orden de tiempos de llegada (Anderson, 1981) .....</i>	<i>1</i>
1.2 <i>Localización epicentral basada en las funciones empíricas de Green sobre la onda Rayleigh desde el ruido sísmico ambiental (Barmin, Levshin, Yang, &amp; Ritzwoller, 2011).....</i>	<i>1</i>
1.3 <i>Estimación rápida de epicentros sísmicos usando los tiempos de viaje de la forma de onda (Vasco et al., 2019) .....</i>	<i>2</i>
1.4 <i>Algoritmo de la maximización de la esperanza para la determinación directa de la posición (Tzoreff &amp; Weiss, 2017) .....</i>	<i>2</i>
<b>CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO .....</b>	<b>4</b>
2.1 LA TRANSFORMADA DE HILBERT (RAMÍREZ-CASTRO & MONTEJO, 2011) .....	4
2.2 LA TRANSFORMADA DE FOURIER (GOSWAMI & CHAN, 2011).....	7
2.2.1 <i>Propiedades de la transformada de Fourier .....</i>	<i>8</i>
2.3 TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA (GERARDO & FRAGA, 2001) .....	11
2.5 LA SERIE DISCRETA DE FOURIER .....	12
2.6 DISTRIBUCIÓN NORMAL O GAUSSIANA.....	16
2.6.1 <i>Distribución normal bivariada .....</i>	<i>18</i>
2.7 VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA (CANAVOS, 1988).....	19
2.8 ESTIMADOR .....	20
2.9 EL PRINCIPIO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD .....	21
2.10 MÁXIMA VEROSIMILITUD.....	22
2.11 EL ALGORITMO DE MAXIMIZACIÓN DE LA ESPERANZA.....	23
2.12 APLICACIÓN DEL ALGORITMO EM DE MÚLTIPLES VARIABLES GAUSSIANAS .....	25
2.12.1 <i>Ejemplo introductorio (Tood K. &amp; stirling C., 2000) .....</i>	<i>27</i>
2.13 ALGORITMO DE MAXIMIZACIÓN DE LA ESPERANZA PARA LA DETERMINACIÓN DIRECTA DE LA POSICIÓN (EM-DPD).....	31
<b>CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA .....</b>	<b>39</b>
3.1 POSICIONAMIENTO DE LAS ESTACIONES SÍSMICAS DENTRO DE LA ZONA DE CONVERGENCIA.....	39
3.2 ADAPTACIÓN DE UNA SEÑAL SÍSMICA DE LA RED K-NET AL DOMINIO DE HILBERT Y FOURIER .....	39
3.3 APLICACIÓN DEL ALGORITMO EM-DPD A TRES SEÑALES OBTENIDAS A PARTIR DE LA VARIACIÓN EN MAGNITUD Y FASE DE UNA SEÑAL .....	40

3.4 DETERMINACIÓN DEL EPICENTRO GENERADO POR EL ALGORITMO EM-DPD CON BASE EN LA SEÑAL MODIFICADA EN AMPLITUD Y FASE.....	45
3.5 SELECCIÓN ALEATORIA DE LAS SEÑALES DE LAS ESTACIONES SÍSMICAS MYG005, MYG006 Y IWT015 .....	45
3.6 ADAPTACIÓN DE LAS SEÑALES SÍSMICAS DE LOS REGISTROS DE LAS ESTACIONES MYG005, MYG006 Y IWT015 AL DOMINIO DE HILBERT Y FOURIER .....	45
<b>CAPÍTULO 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN .....</b>	<b>47</b>
4.1 PROCESAMIENTO DE LOS DATOS DE LAS ESTACIONES SÍSMICAS .....	47
4.2 EPICENTRO GENERADO POR EL ALGORITMO EM-DPD A PARTIR DE LAS ESTACIONES SÍSMICAS MYG005, MYG006 Y IWT015 ..	53
4.3 SEÑALES OBTENIDAS DESPUÉS DE CONSIDERAR LA VARIABLE ALFA DEL PROCESO DEL ALGORITMO EM- DPD .....	55
SE CONSIDERA QUE <b><i>A<sub>is</sub></i></b> ES EL ESPECTRO DE FASES ( <b><i>A<sub>i</sub></i></b> ) MULTIPLICADO POR EL ESPECTRO DE FUENTE ( <b><i>s</i></b> ) QUE REPRESENTA LA SEÑAL EMISORA DEL SISMO. ....	55
EN LAS FIGURAS 15, 16 Y 17 SE MUESTRAN LAS SEÑALES CORRESPONDIENTES A LA MODIFICACIÓN DE LA SEÑAL REGISTRADA POR LAS ESTACIONES SÍSMICAS TRABAJADAS POR EL FACTOR ALFA. ....	55
<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>58</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>59</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>61</b>

## INDICE DE TABLAS

<i>Tabla 1.</i> Resultados de las iteraciones hasta la convergencia.....	33
<i>Tabla 2.</i> Localización de epicentros propuestos para el paso de la esperanza .....	44
<i>Tabla 3.</i> Posición de los sensores en la superficie terrestre.....	47
<i>Tabla 4.</i> Posiciones para el paso E .....	51
<i>Tabla 5.</i> Orden de los sensores por distancia al origen del sismo .....	53

## INDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1 Diagrama de flujo del algoritmo EM.....</i>	<i>xii</i>
<i>Figura 2 Representación del cinturón circumpacífico. Recuperado de <a href="https://steemit.com/news/">https://steemit.com/news/</a>.....</i>	<i>xvi</i>
<i>Figura 3 Representación gráfica de una señal discreta en el tiempo .....</i>	<i>11</i>
<i>Figura 4 Secuencia arbitraria de una señal discreta.....</i>	<i>12</i>
<i>Figura 5 Gráfica de la función de densidad de probabilidad para distintos valores de <math>\mu</math> y <math>\sigma</math> .....</i>	<i>17</i>
<i>Figura 6 Función de densidad de probabilidad bivariada con <math>\sigma</math> pequeña y grande respectivamente.....</i>	<i>19</i>
<i>Figura 7 Maximización del valor de <math>\theta</math> para la función de densidad de probabilidad (Papoulis, 1990) .....</i>	<i>23</i>
<i>Figura 8 Aplicación del algoritmo EM en el agrupamiento de datos (Matlab® R2018b) .....</i>	<i>27</i>
<i>Figura 9 Posicionamiento de las estaciones sísmicas cercanas al origen del sismo del 14 de junio del 2008 en Japón .....</i>	<i>40</i>
<i>Figura 10 Transformadas de las señales iniciales alteradas en amplitud y fase del registro IWT010 para el primer desarrollo del algoritmo EM-DPD, diferenciadas por a, b y c.....</i>	<i>42</i>
<i>Figura 11 a) Variación del epicentro para la maximización de <math>r(i)</math>      b) Respuesta para <math>r_i</math> como la maximización de <math>r(i)</math> .....</i>	<i>44</i>
<i>Figura 12 Epicentro del primer desarrollo en el algoritmo EM-DPD .....</i>	<i>45</i>
<i>Figura 13 Visualización del posicionamiento de los sensores, enumerados por distancia, la estrella representa el epicentro real.....</i>	<i>46</i>
<i>Figura 14 Señales correspondientes a la estación IWT025.....</i>	<i>48</i>
<i>Figura 15 Espectro de amplitud <math>s</math> y su transformada de Fourier <math>A_i(61)</math> de la estación MYG005 alterada por el factor alfa .....</i>	<i>55</i>
<i>Figura 16 Espectro de amplitud <math>s</math> y su transformada de Fourier <math>A_i(61)</math> de la estación MYG006 alterada por el factor alfa .....</i>	<i>56</i>
<i>Figura 17 Espectro de amplitud <math>s</math> y su transformada de Fourier <math>A_i(61)</math> de la estación IWT015 alterada por el factor alfa .....</i>	<i>56</i>
<i>Figura 18 a) Representación gráfica de la función <math>\text{sen}(2t)</math>      b) Espectro de amplitudes de la Transformada de Fourier.....</i>	<i>61</i>
<i>Figura 19. Transformada de Fourier de la función <math>\text{sen}(2t)</math> y <math>\text{sen}(2t - \pi/4)</math>, respectivamente en donde se observa que el espectro de fases no varía cuando hay un desplazamiento en el tiempo, solo se afecta el espectro de fases. ....</i>	<i>63</i>
<i>Figura 20 Transformada de Fourier de la función <math>\text{sen}(2t/7)</math>, gráfica de magnitud y ángulo de fase, respectivamente .....</i>	<i>64</i>
<i>Figura 21 Transformada de Fourier de función correspondiente espectro de amplitudes y fases respectivamente ..</i>	<i>65</i>

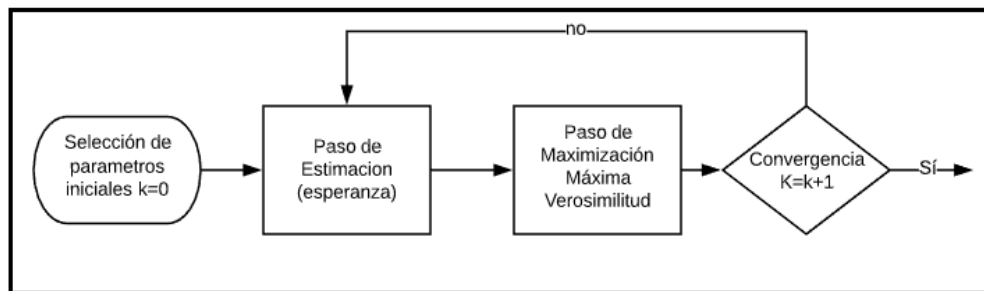
## Introducción

La intensa actividad sísmica en las zonas costeras del Océano Pacífico se debe a la convergencia de las placas tectónicas causada por el arrastre de las corrientes magmáticas del manto en diferentes direcciones, además de ser resistidas por la fricción (origen de los sismos), estos movimientos alcanzan un desplazamiento de 5 a 7 centímetros por año y pueden ser de tres tipos; de separación horizontal en las aberturas, de deslizamiento horizontal relativo y de subducción. Esto provoca una gran concentración de energía lista para ser liberada y ser percibida en la corteza terrestre provocando un impacto económico, social y ambiental.

Las diferentes características de los movimientos sísmicos se han convertido en objeto de investigación; el epicentro, el hipocentro, la magnitud del sismo, la aproximación de las frecuencias contenidas, la profundidad, la duración, efectos de sitio, entre otros. Existe una gran cantidad de métodos propuestos para la determinación de las características, por ejemplo para el epicentro se mencionan los siguientes: distribución espacial de la intensidad de datos (Zohar & Marco, 2012), aproximación del epicentro basado en el criterio de las redes sísmicas (Bondár, Myers, Engdahl, & Bergman, 2004), estimación rápida de la distancia epicentral de un terremoto utilizando registros de una sola estación sismológica, mediante técnicas de aprendizaje de máquinas (Ochoa, Niño, & Vargas, 2018). El método propuesto en esta investigación se basa en el algoritmo de maximización de la esperanza para la determinación directa de la posición (Tzoreff & Weiss, 2017). Este método es aplicado para la localización de un misil en movimiento a partir de una señal enviada y registrada por diferentes sensores, al aplicar el algoritmo EM-DPD se estima la posición del misil en tiempo real y se traza su trayectoria.

El algoritmo EM-DPD está sustentado en parte por la técnica iterativa de la maximización de la esperanza desarrollada por Dempster (Dempster *et al.*, 1977) para la determinación de datos

faltantes con máxima verosimilitud. El algoritmo EM consiste en dos pasos principales: el primero es la estimación del dato faltante a partir de los datos observados; enseguida se realiza una maximización que provee una nueva estimación de los parámetros. Estos dos pasos son iterados hasta que se llegue a lograr la convergencia. Este algoritmo es ilustrado en la figura 1.



*Figura 1* Diagrama de flujo del algoritmo EM

El Proceso DPD (determinación directa de la posición) aproxima el sitio del transmisor directamente. En los métodos tradicionales, los tiempos de llegada son obtenidos por sensores separados espacialmente y estos a su vez son reenviados a una unidad central para estimar la localización del transmisor. El método DPD incorpora los dos pasos en uno solo al calcular la distancia euclidiana.

La aplicación del algoritmo EM-DPD al caso de las señales sísmicas proporciona una estimación del epicentro. La diferencia en la aplicación del método es que está diseñado para misiles, los cuales están en movimiento, y en el caso de los sismos, la aproximación es fija, es decir, no se espera un movimiento en la respuesta del método. Las posibles diferencias en la posición que se pudieran obtener estarían relacionadas con la geometría de la fuente sísmica.

## **Planteamiento del problema**

El estudio de los sismos a nivel global tiene gran auge, sobre todo en los países que se encuentran en el cinturón de fuego, las investigaciones están enfocadas generalmente en la magnitud, el tiempo de duración, el contenido frecuencial, el tipo de falla, el origen del sismo, etc. Tales estimaciones se realizan a través de instrumentos sísmicos dedicados a la medición de aceleraciones terrestres, cabe señalar que existe un procesamiento de los datos obtenidos por las estaciones para poder proporcionar las estimaciones correspondientes.

La implementación de una red sísmica en cada país se volvió una prioridad. En México existe la red del SSN (Servicio Sismológico Nacional) que consta de 61 observatorios, desafortunadamente algunas están fuera de servicio. Esto afecta a la investigación en el país debido a que el número de instrumentos sísmicos es reducido. Existen varios métodos para la medición de las características propias de un sismo. La localización del epicentro, objeto de estudio en esta investigación, se realiza a través de los tiempos de llegada TOA (por sus siglas en inglés Time of Arrival), ángulos de llegada AOA (por sus siglas en inglés Angle of Arrival), Intensidad de la señal recibida RSS (por sus siglas en inglés Received Signal Strength), la determinación directa de la posición DPD (por sus siglas en inglés Direc Position Determination) entre otros.

Como se mencionó la red del SSN ha reducido su eficiencia por el número de estaciones en desuso lo que conlleva a una baja densidad de instrumentos sísmico en zonas con alta probabilidad de movimientos sísmico, como lo es Oaxaca, lo que lleva a considerar la aplicación de un alternativo para la medición de características sísmicas con un número reducido de estaciones sísmicas, y así, contribuir a la disminución del riesgo sísmico.

**Objetivo general**

Determinación del epicentro de un sismo mediante el algoritmo EM-DPD

**Objetivos específicos**

Seleccionar un conjunto de señales de aceleraciones registradas para un sismo dado por la red K-Net para la aplicación del algoritmo EM-DPD

Calcular las transformadas de Hilbert para obtener su señal envolvente y sus correspondientes transformadas de Fourier para conocer el contenido frecuencial de las señales seleccionadas

Aplicar el algoritmo de maximización de la esperanza para la determinación directa de la posición del epicentro.

Analizar e interpretar los resultados obtenidos de adaptar el procedimiento de la determinación directa de la posición propuesto por Tzoreff y Weiss (2017) a un escenario sísmico

**Hipótesis**

El epicentro de un sismo se estima al aplicar el método EM-DPD a un conjunto de registros de aceleraciones producidas por dicho sismo y registradas por estaciones sísmicas cercanas al origen.

## **Justificación**

El cinturón de fuego del Pacífico o anillo de fuego se caracteriza por concentrar las zonas de subducción más importantes en el mundo y se extiende sobre 40,000 km, tiene forma de herradura y está distribuido en las costas del Océano Pacífico, provoca además una intensa actividad sísmica en países como Chile, Argentina, Bolivia, Perú, Ecuador, Colombia, Panamá, Costa Rica, Nicaragua, Japón, Rusia, Filipinas Indonesia, Papúa Nueva Guinea entre otros, además de tener un impacto social, económico y natural. Cuando ocurre un sismo, las ondas sísmicas viajan a diferentes frecuencias a través de la corteza terrestre y son atenuadas o amplificadas por los llamados efectos de sitio, al paso de ellas se producen diversos daños, desde pérdidas materiales hasta humanas, por ello, la importancia del estudio de los sismos.

La actividad sísmica es registrada por una red de instrumentos sísmicos (estaciones sísmicas) que realizan mediciones de diferentes variables sísmicas. Los datos registrados se asocian con otras estaciones sísmicas para la determinación de diferentes características (localización del sismo, profundidad, magnitud, frecuencia predominante). Existen varias redes de estaciones sísmicas en el mundo, por mencionar algunas: en España se encuentra la Red Sísmica Nacional del Instituto Geológico; en Japón, las redes son K-NET y KiK-net (<http://www.kyoshin.bosai.go.jp/>); en Venezuela está la Fundación Venezolana de Estaciones Sísmicas (<http://www.funvisis.gob.ve/index.php>); en Europa el Centro Sismológico de Europa-Mediterráneo (<https://www.emsc-csem.org/#2>); en Estados Unidos el Instituto Geológico de Estados Unidos (USGS, <https://www.usgs.gov/>); en México, ésta la red del Servicio Sismológico Nacional conformada por 61 observatorios sismológicos (<http://www.ssn.unam.mx/acerca-de/estaciones/>). Desafortunadamente varios de ellos se encuentran en mal estado.

Uno de los países que ha realizado una gran inversión en sus redes sísmicas, es Japón. Tiene la red K-NET y la red KiK-net, la primera cuenta con más de 1,000 observatorios distribuidos uniformemente cada 20 km y la segunda está conformada por pares de sismógrafos ubicados en las profundidades terrestres y cuenta aproximadamente con 700 estaciones en el país. Es por ello que esta investigación utiliza los registros sísmicos de uno de los sismos de Japón (Terremoto de Iwate-Miyagi Nairiku, 7.2 grados en la escala local, 14 junio 2008, 08:43 h.), además de tener un fácil acceso a los datos sísmicos a través de su plataforma.



*Figura 2* Representación del cinturón circumpacífico. Recuperado de <https://steemit.com/news/>

El algoritmo EM-DPD propuesto por Dempster (Dempster *et al.*, 1977) no ha sido utilizado para determinar ubicaciones del epicentro, hipocentro o alguna otra característica localizable propia de los sismos, a diferencia del algoritmo EM, que tiene más aplicación a otras áreas del conocimiento, en particular de los sismos, como se puede observar en los trabajos de: Han, Zhao, Li, & Reynolds, 2011; Vasco, Nakagawa, Petrov, & Newman, 2019; y Pertsinidou, Tsaklidis, Papadimitriou, & Linnios, 2017.

Por lo anterior, es importante el estudio para la determinación del epicentro un sismo a través del algoritmo EM-DPD para proponer una nueva técnica en la aproximación del epicentro

sísmico, y a su vez, determinar zonas con una mayor probabilidad de afectación para la reducción del riesgo sísmico.

## **Capítulo 1. Antecedentes**

Algunos de los principales trabajos enfocados a la identificación del epicentro de un sismo se describen a continuación:

### **1.1 Localización epicentral utilizando el orden de tiempos de llegada (Anderson, 1981)**

Para determinar el epicentro de un sismo se utiliza la posición de la primera estación en reportarlo como la propuesta epicentral inicial. Esta investigación utiliza toda la información disponible para determinar una región pequeña que contenga al epicentro, para cada tiempo de arribo, se restringe al epicentro a caer en un lado de la bisectriz perpendicular entre las estaciones correspondientes en la cuales se detectaron los primeros tiempos de llegada. El estudio está basado en 5 estaciones sísmicas y el epicentro está detectado solo en el plano de latitud y longitud, asume un orden de llegada de las ondas P, y resuelve por el método de Skew-Norm, el cual tiene una tolerancia sobre restricciones inconsistentes. La localización por orden de llegada (AOL, por sus siglas en inglés) determinada por el algoritmo de Skew-Norm es la intersección de dos de las bisectrices sobre el borde de una región factible, la cual satisface la mayoría de las restricciones posibles.

### **1.2 Localización epicentral basada en las funciones empíricas de Green sobre la onda Rayleigh desde el ruido sísmico ambiental (Barmin, Levshin, Yang, & Ritzwoller, 2011)**

Esta investigación desarrolla un nuevo método para determinar la localización de los eventos sísmicos locales, la cual está basada en las funciones empíricas de Green para ondas Rayleigh de periodos entre 5 y 7 segundos que son determinados por una relación cruzada de las

series de tiempo de ruido ambiental registrada por pares de estaciones sísmicas. La principal ventaja de este método es que no cae sobre un modelo terrestre, más bien, se basa en la interpolación de las EGF's (funciones empíricas de Green, por sus siglas en inglés) sobre ubicaciones de eventos hipotéticos arbitrarios.

### **1.3 Estimación rápida de epicentros sísmicos usando los tiempos de viaje de la forma de onda (Vasco *et al.*, 2019)**

La investigación localiza el epicentro sísmico usando tiempos de llegada derivados de la forma de onda; propone series abundantes de simulaciones de forma de onda para todas las estaciones sísmicas, con fuentes posicionadas sucesivamente en cada estación. El campo de interés sobre el cual se trabajará que es el tiempo de viaje de las ondas es calculado por la aplicación del algoritmo de selección de fase a las formas de onda de cada simulación. Un evento es localizado al substrair el registro de tiempo de viaje del tiempo de arribo de cada estación, esto proporciona un campo de tiempo de viaje desplazado y revertido en tiempo para cada estación, y aproxima el tiempo de inicio en la ubicación de cada fuente, la media o mediana de la localización de la fuente aproxima así el tiempo de origen del sismo. La incertidumbre en la posición del evento es provista por los contornos del error estándar definidos sobre la región cuadrícula. Una aplicación de esta técnica a un conjunto de datos sintéticos indica que el enfoque provee epicentros estables incluso cuando los tiempos de viaje están contaminados por ruido aleatorio que contiene un número significativo de resultados atípicos y errores del modelo de velocidad.

### **1.4 Algoritmo de la maximización de la esperanza para la determinación directa de la posición (Tzoreff & Weiss, 2017)**

Esta investigación se enfoca en el método de la determinación directa de la posición, basado en las medidas de los tiempos de arribo (TOA, por sus siglas en inglés) de la señal, en el

cual la localización del transmisor es determinada en un solo paso a partir de las señales interceptadas por todos los sensores. El método propuesto está basado en el algoritmo Expectation-Maximization (EM), el cual está diseñado para encontrar la máxima verosimilitud (ML Maximum Likelihood) cuando los datos registrados están incompletos, es decir, supone un modelo en donde los datos completos se desconocen. El algoritmo EM-DPD está orientado a aplicaciones militares y enfocado en los tiempos de arribo a los sensores de señales electromagnéticas. Tradicionalmente, la localización del transmisor es desarrollada en dos pasos: primero considera que los tiempos de arribo (TOA) son obtenidos de manera independiente por sensores separados espacialmente; en el segundo paso, las mediciones del TOA registradas por todos los sensores son transmitidas a una unidad central para estimar la localización del transmisor.

La investigación propone un algoritmo eficiente para encontrar el extremo de la función objetiva para la determinación de la posición directa, la cual corresponde a la ubicación del objetivo, en nuestro caso sería el epicentro de un sismo.

## Capítulo 2. Marco teórico

Los sismos son provocados por el choque de las placas tectónicas, sobre todo en los lugares donde existe la convergencia de estas, dichos movimiento contemplan distintas características como el tiempo de origen, el lugar de inicio (hipocentro), el epicentro, el tipo de movimiento, etc. Las estaciones sísmicas registran las aceleraciones de la superficie terrestre en el lugar en el que éstas se encuentren localizadas, a partir de dichas señales (discretas) se pueden calcular algunas de las características de un sismo. El estudio de las señales, generalmente se lleva a cabo por técnicas como la transformada de Fourier, la transformada Wavelet, la transformada de Hilbert o la combinación de estas. En esta investigación se utilizan las transformada de Fourier y la transformada de Hilbert.

### 2.1 La transformada de Hilbert (Ramírez-Castro & Montejo, 2011)

La transformada de Hilbert (HT) es quizá la forma más simple de analizar los cambios en frecuencia y amplitud de una señal en el tiempo. La HT se define como

$$H[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (1)$$

La HT es la convolución entre la función a ser estudiada y el inverso del tiempo, por tanto, enfatiza en las propiedades locales de la función. La HT se utiliza principalmente para construir la señal analítica  $z(t)$ .

$$z(t) = x(t) + iH[x(t)] \quad (2)$$

La señal analítica es compleja, su espectro de frecuencias es cero para las frecuencias negativas y la parte real debe de ser igual a la señal original, reescribiéndose de la siguiente manera:

$$z(t) = a(t)e^{i\theta(t)}$$

$$a(t) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \theta(t) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Como se puede interpretar el módulo de la señal analítica representa una amplitud instantánea y por ende una frecuencia instantánea dada por:

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta}{dt}$$

En conclusión, se puede decir que la transformada de Hilbert es una herramienta matemática que permite obtener la envolvente de una señal sin cambiar de dominio, es decir, la HT entrega una señal más con características singulares. Ahora, si se obtiene la transformada de Fourier a la HT se obtiene

$$\mathcal{F}\left[-\frac{1}{\pi t}\right] = i \sin(s) \quad (3)$$

Entonces la HT equivale a dejar las amplitudes de las componentes espectrales de la señal con la misma amplitud, pero desfasadas por  $\pm = \frac{\pi}{2}$ , según el signo de la variable  $s$ .

Ejemplo de la HT: Dada una señal de onda modulada  $g(t)$

$$g(t) = \sin(\omega t) \sin(\Omega t)$$

Donde  $\omega > \Omega$ , la señal envolvente puede ser construida desde el valor absoluto de la señal analítica y su transformada de Hilbert

$$\hat{g}(t) = g(t) + i\hat{g}(t)$$

la HT  $\hat{g}(t)$  de  $g(t)$  se obtiene a partir de:

$$\hat{g}(t) = - \int_0^{\infty} [a(f) \sin(ft) - b(f) \cos(ft)] df$$

$$a(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos(ft) dt$$

$$b(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin(ft) dt$$

$$a(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t) \sin(\Omega t) \cos(ft) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(\omega - \Omega)t - \cos(\omega + \Omega)t) \cos(ft) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} [\delta(f - \omega + \Omega) + \delta(f - \omega - \Omega)]$$

Análogamente

$$b(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t) \sin(\Omega t) \sin(ft) dt$$

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$b(f) = 0$$

Entonces

$$\hat{g}(t) = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [\delta(f - \omega + \Omega) - \delta(f - \omega - \Omega)] \sin(ft) df$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi} [\sin((\omega - \Omega)t) - \sin(\omega + \Omega)t] \\
&= \frac{1}{2\pi} [\sin((\Omega - \omega)t) - \sin(\Omega + \omega)t] \\
&= \frac{1}{\pi} \sin(\Omega t) \cos(\omega t)
\end{aligned}$$

Como se puede notar la forma correcta de la transformada de Hilbert es:

$$\hat{g}(t) = -\sin(\Omega t) \cos(\omega t)$$

Ahora que  $\hat{g}(t)$  ha sido construida, la señal analítica puede ser escrita explícitamente como:

$$HT[g(t)] = \sin(\omega t) \sin(\Omega t) - i \sin(\Omega t) \cos(\omega t)$$

## 2.2 La transformada de Fourier (Goswami & Chan, 2011)

La transformada de Fourier es un proceso matemático que trabaja una función  $f(t)$  con el fin de cambiar su dominio en el tiempo a un dominio en la frecuencia, es decir que las características de la señal no serán alteradas, sino que la transformada de Fourier  $F(\omega)$  será otra forma de observar la señal procesada por la serie de Fourier, se dice que una señal  $f(t)$  viven en el dominio del tiempo y la transformada de Fourier de la misma señal vive en el dominio de la frecuencia.

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

El proceso de la transformación de una señal  $f(t)$  a una señal  $F(\omega)$  se lleva a cabo a partir de la serie de Fourier que está representada por la siguiente ecuación.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sen n\omega_0 t) \quad (4)$$

Donde  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de Fourier, la función (1) es la representación en senos y cosenos de una señal que es; continua, periódica y de duración infinita, y que además está en función del tiempo, alternativamente una señal también puede ser representada en el dominio de la frecuencia, conocida como la transformada de Fourier, ambas representaciones de la señal contienen exactamente la misma información de la señal respondiendo a enfoques distintos y complementarios, en esta última se debe asumir que la señal es aperiódica y de duración finita.

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (5)$$

Las expresiones (2) y (3) dan a entender que a partir de la información de uno de los dominios puede obtenerse la información contenida en otro.

## 2.2.1 Propiedades de la transformada de Fourier

### 2.2.1.1 Linealidad

Si la transformada de Fourier de una señal se ve influida por un escalar  $\alpha$ , entonces la señal original en el dominio del tiempo se afecta por el mismo escalar  $\alpha$ .

$$\alpha f(t) = \alpha F(\omega) \quad (6)$$

Si se considera la Transformada de Fourier como una combinación lineal de señales, entonces esta será la misma que la combinación lineal de la transformada de Fourier de cada señal individual.

Supóngase la siguiente señal:

$$z(t) = \alpha f_1(t) + \alpha f_2(t) \quad (7)$$

Entonces:

$$Z(\omega) = \alpha F_1(\omega) + \alpha F_2(\omega)$$

### 2.2.1.2 Desplazamiento en el tiempo

El desplazamiento en el tiempo muestra que un desplazamiento en el tiempo es equivalente a un desplazamiento de fase lineal en la frecuencia. El contenido de la frecuencia depende solamente de la forma de la señal, este contenido es invariable en el desplazamiento en el tiempo, por lo cual solamente la fase del espectro será alterada.

$$z(t) = f(t - \tau)$$

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) e^{-i\omega t} dt$$

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega(u+\tau)} du \quad (8)$$

$$Z(\omega) = e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du$$

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{e}^{-i\boldsymbol{\omega}\tau} \mathbf{F}(\boldsymbol{\omega})$$

### 2.2.1.3 Escalamiento en el Tiempo

Esta propiedad hace referencia al efecto de la representación del dominio de la frecuencia de una señal si la variable tiempo ( $t$ ) es alterada. El concepto para interpretar es que las señales que son estrechas en el tiempo son amplias en frecuencia y viceversa.

$$z(t) = f(at)$$

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt$$

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u/a} \frac{du}{a}$$

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u/a} \frac{du}{a}$$

$$Z(\omega) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u/a} du$$

$$Z(\omega) = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (9)$$

$u = at$ $t = \frac{u}{a}$
-------------------------------

### 2.2.1.4 Desplazamiento en Frecuencia

El desplazamiento en frecuencia es similar a la propiedad de desplazamiento en el tiempo, observándose el desplazamiento en frecuencia relacionada a la  $\omega$  del factor multiplicativo.

$$z(t) = f(t)e^{i\omega_0 t} \quad (10)$$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-i\omega t} dt \quad (11)$$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt \quad (12)$$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega-\omega_0)t} d\omega$$

$$f(t)e^{i\omega_0 t} = F(\omega-\omega_0) \quad (13)$$

En el anexo A.1 se muestran algunos ejemplos de las propiedades mencionadas.

Las transformadas de Fourier que se han analizado han sido para señales en tiempo continuo, para el caso en el que la señal sea en tiempo discreto se ha desarrollado la transformada de Fourier discreta.

### 2.3 Transformada de Fourier discreta (Gerardo & Fraga, 2001)

Dado el avance tecnológico que se tiene en la actualidad, una señal analógica se puede discretizar para ser procesada por diferentes algoritmos como: filtrado de la señal, contenido de frecuencias, por mencionar algunas. Una señal digital en el tiempo es secuencia de números  $x$ , en la cual el  $n$ -ésimo número en la secuencia se denota por  $x(n)$ , y se escribe formalmente como

$$x = x\{n\}; -\infty < n < \infty$$

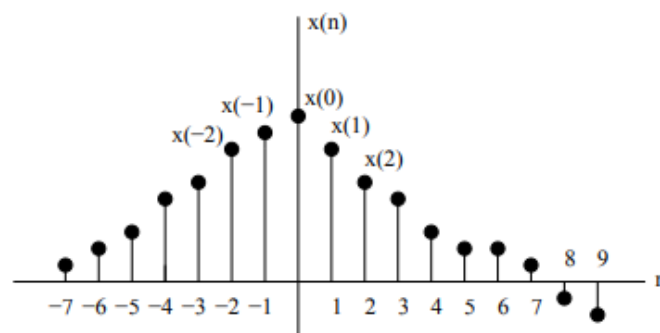


Figura 3 Representación gráfica de una señal discreta en el tiempo

Cabe señalar que los valores para la abscisa están definidos solo para valores enteros de  $n$ . La señal analógica es transformada a una señal discreta por medio de la función impulso desplazada en el tiempo al multiplicarla con la señal original, por ejemplo, una señal  $p(n)$  puede representarse de la forma siguiente

$$p(n) = a_{-3}\delta(n + 3) + a_1\delta(n - 1) + a_2\delta(n - 2) + a_7\delta(n - 7)$$

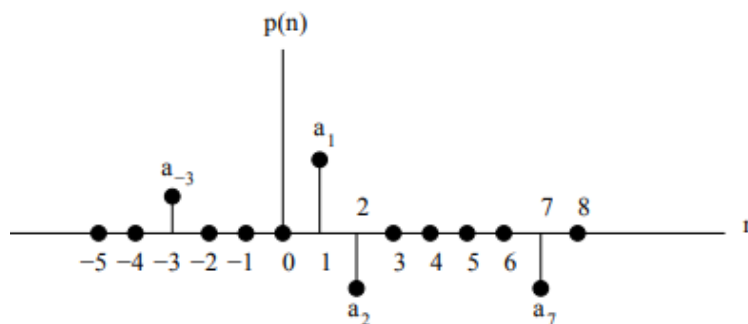


Figura 4 Secuencia arbitraria de una señal discreta

En la figura 4 se aprecia la representación de la serie  $p(n)$  la cual se puede representar de forma general como

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k) \quad (14)$$

## 2.5 La serie discreta de Fourier

Considere una secuencia  $\tilde{x}(n)$  que es periódica con periodo  $T = N$ , de forma que  $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + kN)$  para cualquier valor entero de  $k$ . Entonces es posible representar a  $\tilde{x}(n)$  en términos de series de Fourier, esto es, a través de la suma de series de senos y cosenos o equivalentemente por series de exponenciales complejas, con frecuencias múltiplos de enteros de la frecuencia fundamental  $2\pi/N$  asociada con la serie periódica. En contraste con las series de Fourier de funciones periódicas continuas, existen solamente  $N$  distintas exponenciales complejas que tienen un periodo que es un submúltiplo entero del periodo fundamental  $N$ .

$$e_k(n) = e^{j(2\pi/N)nk} \quad (15)$$

La ecuación (15) es periódica en  $k$  con un periodo  $N$ . Entonces,  $e_0(n) = e_N(n)$ ,  $e_1(n) = e_{N+1}(n)$ , etc., y consecuentemente el conjunto  $N$  de exponenciales complejas de la ecuación (13) con  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$  que define a todas las exponenciales complejas distintas con frecuencias que son un múltiplo entero de  $2\pi/N$ . Así, la representación en series de Fourier de una secuencia periódica,  $\tilde{x}(n)$ , necesita contener solo  $N$  de estas exponenciales complejas y por esta razón tiene la forma

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j(2\pi/N)nk}$$

La constante multiplicativa  $1/N$  ha sido incluida por conveniencia y por supuesto, no tiene un efecto importante sobre la naturaleza de la representación. Para obtener los coeficientes  $\tilde{X}(k)$  a partir de la secuencia periódica  $\tilde{x}(n)$ , se usa el hecho de que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)nk} = \begin{cases} 1, & \text{para } n = mN \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Por lo tanto, se multiplican ambos lados de la ecuación (14) por  $e^{j(2\pi/N)nr}$  y sumado de  $n = 0$  hasta  $N-1$ , se obtiene

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{j(2\pi/N)nr} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j(2\pi/N)(k-r)n}$$

intercambiando el orden de la suma sobre el lado derecho de la ecuación

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{j(2\pi/N)nr} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(k-r)n} \right]$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{j(2\pi/N)nr} = \tilde{X}(r)$$

Por lo que los coeficientes  $\tilde{X}(k)$  en la ecuación (15) se obtienen de la relación

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{j(2\pi/N)nk} \quad (16)$$

Note que la secuencia  $\tilde{X}(k)$  dada por la ecuación (16) es periódica en un periodo de  $N$ ; es decir,  $\tilde{X}(0) = \tilde{X}(N)$ ,  $\tilde{X}(1) = \tilde{X}(N + 1)$ , etc. Esto es consistente con el hecho de que las exponenciales complejas de la ecuación (14) son solamente distintas para  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , y de este modo solo puede haber  $N$  coeficientes distintos en la representación en series de Fourier de una serie periódica (Gerardo & Fraga, 2001).

Las ecuaciones (15) y (16) juntas se aprecian como un par de transformaciones y se refieren como la representación en series discretas de Fourier (SDF) de una secuencia periódica. Por conveniencia en la notación estas ecuaciones generalmente se escriben en términos de  $W_N$  definido como

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)} \quad (17)$$

De esta forma el par de SDF de análisis y síntesis queda expresado como

$$\begin{aligned} \tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} \\ \tilde{x}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} \end{aligned} \quad (18)$$

Considérese una secuencia de duración finita  $x(n)$  de largo  $N$  de forma que  $x(n) = 0$  excepto en el intervalo  $0 \leq n \leq (N - 1)$ . Claramente una secuencia de largo  $M$  menor que  $N$  también se puede considerar de largo  $N$ . Teniendo en amplitud cero los últimos  $(N - M)$  puntos

del intervalo. La secuencia periódica correspondiente de periodo  $N$ , para la cuál  $x(n)$  es un periodo, será denotada por  $\tilde{x}(n)$  y está dada por

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN)$$

Dado que  $x(n)$  es de largo finito  $N$  no hay solapamiento entre los términos  $x(n + rN)$  para diferentes valores de  $r$ . Así la ecuación (17) puede ser escrita alternativamente como

$$\tilde{x}(n) = x(n \parallel N \parallel) \quad (20)$$

Donde  $\parallel \parallel$  indica la operación módulo. La secuencia de duración finita  $x(n)$  es obtenida a partir de  $\tilde{x}(n)$ , extrayendo un periodo.

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Por conveniencia en la notación, es útil definir la secuencia rectangular  $R_N(n)$  dada por

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Con esta notación la ecuación (19) puede escribirse como

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)$$

Los coeficientes de las series de Fourier discreta  $\tilde{X}(k)$  de la secuencia periódica  $\tilde{x}(n)$  son en si mismas una secuencia periódica con periodo  $N$ . Para mantener una dualidad entre los dominios de tiempo y frecuencia, se escogerán los coeficientes de Fourier que se asocian con la secuencia de duración finita correspondiente a un periodo de  $\tilde{X}(k)$ . Así con  $X(k)$  denotando los coeficientes de Fourier que se asocian con  $x(n)$ ,  $X(k)$  y  $\tilde{X}(k)$  y están relacionados por

$$\tilde{X}(k) = X(k \parallel N \parallel) \quad (21)$$

$$X(k) = \tilde{X}(k)R_n(K) \quad (22)$$

Como se mencionó,  $\tilde{X}(k)$  y  $\tilde{x}(k)$  se relacionan por

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)W_N^{kn} \quad (23)$$

$$\tilde{x}(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)W_N^{-kn} \quad (24)$$

Ya que las sumas en las ecuaciones (21) y (22) involucran solamente el intervalo entre 0 y  $N - 1$ , se deduce que

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$x(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}, & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

El par de transformadas dadas por las ecuaciones (23) y (24) se conocen como la transformada discreta de Fourier (TDF), la ecuación (23) representa la transformada de análisis y la ecuación (24) la transformada de síntesis. (Gerardo & Fraga, 2001)

## 2.6 Distribución Normal o Gaussiana

La distribución gaussiana es una de las más importantes y de mayor uso dentro de las distribuciones continuas de probabilidad, es una clave importante dentro de la estadística inferencial para el análisis de datos. La apariencia gráfica de la distribución gaussiana es una curva simétrica con forma de campana, que se extiende sin límite en dirección positiva y negativa, algunos ejemplos del uso de la distribución son el estudio de la temperatura, la precipitación pluvial, mediciones físicas de partes manufacturadas, errores de instrumentación, etc.

En la ecuación (26) se proporciona la función de densidad de probabilidad (PDF, por sus siglas en inglés) de la distribución normal, descubierta por DeMoivre en 1733 y después fue estudiada por Gauss (Azzalini & Genton, 2007), la función de distribución ha sido utilizada de manera extensa por científicos que notaron que los errores seguían un patrón que sugería la distribución normal (Canavos, 1988)

Se dice que una variable aleatoria  $X$  se encuentra normalmente distribuida si su función de probabilidad está dada por

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]} \quad -\infty < x, \mu < \infty, \sigma > 0 \quad (25)$$

Los parámetros de la distribución normal son  $\mu, \sigma$  (la media y la desviación estándar, respectivamente) los cuales definen de manera completa la función de densidad de probabilidad.

En la figura 5 se proporcionan distintos valores para  $\mu, \sigma$

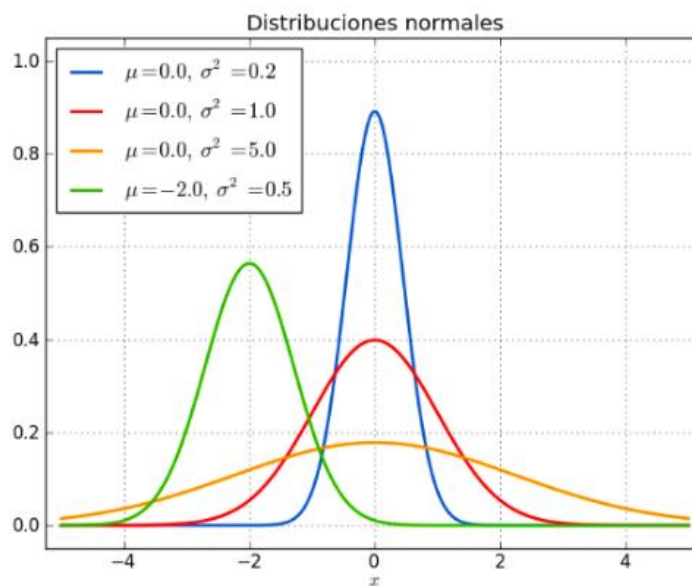


Figura 5 Gráfica de la función de densidad de probabilidad para distintos valores de  $\mu$  y  $\sigma$

Como se puede observar para cualesquiera valores de  $(\mu, \sigma)$ , la función de probabilidad es simétrica con forma de campana, por lo tanto, si se obtiene la segunda derivada de  $f(x; \mu, \sigma)$  y se iguala a cero, se tiene que el valor máximo ocurre cuando  $\mu = \sigma$  y los valores de  $x = \mu \pm \sigma$  son las abscisas de los dos puntos de inflexión de la curva.

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]} dx \quad (26)$$

La media de una variable distribuida se encuentra determinada por la ecuación (26). Una distribución normal es simétrica alrededor de su media  $\mu$  si el valor máximo de la función de densidad de probabilidad normal ocurre cuando  $x = \mu$ ,  $\mu$  es la media, la mediana y la moda de cualquier variable aleatoria distribuida normalmente.

En conclusión, la distribución normal es una distribución de variable continua, la cual, queda definida por dos parámetros de los que depende su función de densidad: la media y la desviación estándar de la distribución.

### 2.6.1 Distribución normal bivariada

La distribución normal bivariada es una generalización de la distribución normal de una variable, debido a esto, es conveniente presentar esta distribución en forma matricial. Se define entonces como un par de variables X y Y que tienen una distribución normal bivariada y se conocen como variables aleatorias distribuidas normalmente en forma conjunta si y solo si su densidad de probabilidad conjunta está dada por

$$g(y) = \frac{1}{(2\pi)^p |\Sigma|^{1/2}} e^{\frac{-(y-\mu)^T \Sigma^{-1} (y-\mu)}{2}} \quad (27)$$

Donde  $p$  es el número de variables  $\mu$  es el vector de medias y  $\Sigma$  es la matriz de covarianzas, el termino  $(y - \mu)^T \Sigma^{-1} (y - \mu)$  es la distancia al cuadrado de  $y$  a  $\mu$  o también llamada distancia mahalanobis (Rencher, 2012), cuando  $\Sigma$  es pequeña indica que los valores de  $y$  están concentrados y cercanos a  $\mu$  en el espacio -  $p$  , en la figura 6 se muestra el caso bivariado con una variación en  $\Sigma$

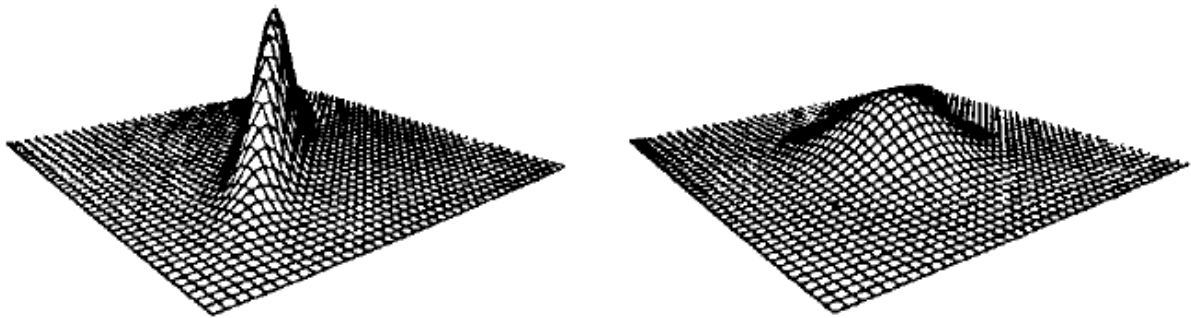


Figura 6 Función de densidad de probabilidad bivariada con sigma pequeña y grande respectivamente

## 2.7 Valor esperado de una variable aleatoria (Canavos, 1988)

A menudo es de interés conocer el valor que tomará una variable aleatoria cuando un experimento se repite varias veces, sin embargo, no es algo sencillo de realizar debido a que toman valores aleatorios y estocásticos. El valor esperado de una variable aleatoria  $X$  es el promedio o valor medio de  $X$  y está dado por

$$E(X) = \sum_x xp(x) \quad \text{si } X \text{ es discreta}$$

$$E(X) = \int_{-x}^x xf(x) \quad \text{si } X \text{ es continua}$$

En donde  $p(x)$  y  $f(x)$  son las funciones de probabilidad y de densidad de probabilidad, respectivamente, en general el valor esperado de una función  $g(x)$  de la variable aleatoria  $X$ , está dado por

(28)

$$E(g(X)) = \sum_x g(x)p(x) \quad \text{si } X \text{ es discreta}$$

$$E(g(X)) = \int_{-x}^x g(x)f(x)dx \quad \text{si } X \text{ es continua}$$

La esperanza de una variable aleatoria  $X$  no es una función de  $X$  sino un número fijo y una propiedad de la distribución de probabilidad de  $X$ . Por otra parte, el valor esperado puede no existir dependiendo de si la correspondiente suma o integral no converge a un valor finito (Canavos, 1988).

De manera similar para definir los valores esperados es una distribución bivariada se tiene que

$$E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y)p(x, y) \quad \text{si } X, Y \text{ son discretas} \quad (29)$$

$$E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f(x, y)dxdy \quad \text{si } X, Y \text{ son continuas}$$

En donde  $g(x, y)$  y  $p(x, y)$  son las funciones de probabilidad y de densidad de probabilidad conjuntas, respectivamente.

## 2.8 Estimador

Supóngase que la distribución de una variable aleatoria  $x$  es una función de  $F(x, \theta)$  de una forma conocida a través del parámetro  $\theta$ , ya sea este último un vector o un escalar. Si se desea estimar el valor de  $\theta$  con base en los valores observados de un experimento dado repetido  $n$  veces, se denota entonces por  $x_i, 1 \leq i \leq n$ , a los valores observados de  $x$ , y al emplear estos valores se podría estimar el valor  $\theta$ .

La estimación de un punto es una función de  $\hat{\theta} = g(X)$  calculado a partir del vector de observación  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ . La correspondiente variable aleatoria  $\hat{\theta} = g(X)$  es el estimador de  $\theta$ , el cual es una estadística basada en los puntos observados. Ahora  $\hat{\theta}$  es un estimador no sesgado del parámetro  $\theta$ , si  $E(\hat{\theta}) = \theta$ . Por otro lado, será un estimador sesgado con sesgo  $b = E(\hat{\theta}) - \theta$ . Si la función  $g(X)$  es seleccionada apropiadamente la estimación del error de  $b = \hat{\theta} - \theta$  decrece conforme  $n$  incrementa, lo cual conduce a un estimador consistente. La media muestral es un estimador no sesgado de la mediana, más aún la varianza  $\sigma^2/n$  tiende a 0 conforme  $n \rightarrow \infty$ . Entonces, un buen estimador de una función  $g(X)$  deberá de minimizar el error. De manera empírica seleccionaremos el estimador de  $g(X)$ , al suponer que  $\theta$  es la esperanza dada por

$$\theta = E(g(X))$$

de alguna función  $g(X)$ , a partir de la cual se puede calcular como

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum g(x_i).$$

## 2.9 El principio de máxima verosimilitud

La característica elemental del principio de máxima verosimilitud (ML, por su siglas en inglés), según se aplica en la teoría de estimación, es que requiere de un parámetro de estimación en el cual la probabilidad de obtener una muestra realmente observada sea tan grande como sea posible, es decir, al contar con observaciones de un evento, se puede “mirar en retroceso” y calcular la probabilidad, al considerar un evento que esta por realizarse, y así, observar los valores de muestra dados. Dicha probabilidad dependerá del parámetro estimado, cuyo valor maximiza su probabilidad. (Tood K. & stirling C., 2000)

Supóngase que la variable aleatoria  $X$  tiene una distribución de probabilidad que depende de un parámetro  $\theta$ , dicho parámetro debe caer en un espacio de posibles parámetros  $\Theta$ . Sea  $f_x(x|\theta)$  denotada por cada función de densidad de probabilidad de  $X$ . Se supone que la forma de  $f_x$  es conocida, pero no el valor del parámetro  $\theta$ . La función de probabilidad de las variables evaluadas en los puntos muestra  $x_1, \dots, x_m$  es

$$\ell(\theta, x_1, \dots, x_m) = \ell(\theta, \mathbf{x}) = f_x(x|\theta) = \prod_{i=1}^m f_x(x_i|\theta) \quad (30)$$

Suponiendo que todas las variables son independientes entre ellas. Esta función es conocida como la función de verosimilitud de la muestra, el principio de máxima verosimilitud requiere seleccionar un estimador del parámetro desconocido, que es el valor de  $\theta$  para el cual la función verosimilitud asume el mayor valor.

Si el parámetro  $\theta$  es un vector  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_k]^T$ , entonces la función de verosimilitud será una función de todos los componentes de  $\boldsymbol{\theta}$ . Entonces se puede considerar a  $\theta$  como un vector y el estimador de la máxima verosimilitud de  $\theta$  es el vector que lleva a la función de verosimilitud a un máximo.

## 2.10 Máxima verosimilitud

El principio de máxima verosimilitud asume que el conjunto de datos muestreados es representativo de la población  $f(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)$  y selecciona el valor para  $\theta$  más probable a ocurrir a partir de los datos observados.

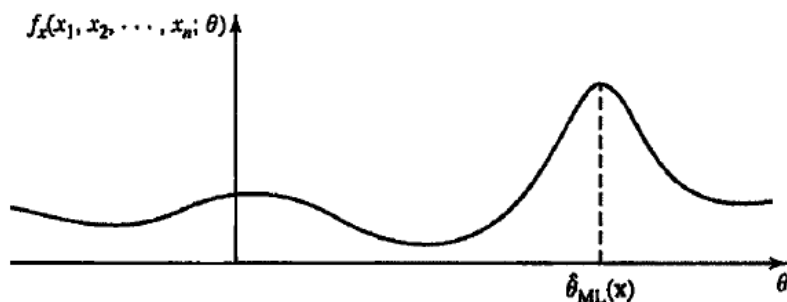


Figura 7 Maximización del valor de theta para la función de densidad de probabilidad (Papoulis, 1990)

Dados  $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ , la función de densidad de probabilidad  $f(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)$  definida como la función de máxima verosimilitud, y el estimador que maximiza la probabilidad de dicha función, ML (Por sus siglas en inglés, Maximun Likelihood) puede ser determinado a partir de la ecuación de máxima verosimilitud como:

$$\hat{\theta}_{ML} = \max f(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)$$

o usando la función de log-ML

$$L(X_1, X_2, \dots, X; \theta) \triangleq \log[ f(X_1, X_2, \dots, X; \theta) ] \quad (32)$$

Si  $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$  es diferenciable y existe un máximo, entonces satisface la ecuación

$$\frac{\partial \log[ f(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) ]}{\partial \theta} = 0 \quad \text{donde } \theta = \hat{\theta}_{ML}$$

## 2.11 El algoritmo de maximización de la esperanza

El algoritmo de maximización de la esperanza ( algoritmo EM ) fue introducido por Dempster, Laird, & Rubin (1977). En general, se puede decir que es un método iterativo para encontrar estimadores de máxima verosimilitud cuando hay datos faltantes y se usa cuando las observaciones están limitadas en la medición o cuando es analíticamente intratable la maximización de la función de verosimilitud, pero se puede estimar asumiendo la existencia de

ciertas variables que no son observadas (variables ocultas) las cuales son una construcción artificial.

El algoritmo EM no proporciona directamente el máximo estimador  $\hat{\theta}$  sino que a partir de cierta estimación inicial  $\theta_0$  construye una sucesión de  $\hat{\theta}_{k \in \mathbb{N}}$  que bajo ciertas condiciones convergerá al estimador de máxima verosimilitud.

Supóngase que en cada experimento aleatorio realizado existe una observación de un parámetro  $x_i$  y un parámetro oculto  $\theta_i$ ; se denota entonces  $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  al conjunto de datos observados en  $n$  realizaciones del experimento, por  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  al conjunto de datos no observados y por  $Y = Z \cup X$  al conjunto completo de datos. Los datos de  $X$  se consideran una variable aleatoria cuya PDF (función de densidad de probabilidad) depende de los parámetros a estimar  $\theta$  y de los datos no observados.

Si se considera  $h$  a la hipótesis actual de los valores de los parámetros  $\theta$  y se denota como  $h'$  a la hipótesis revisada que se estima en cada iteración del algoritmo EM el cual busca la hipótesis  $h'$  que maximiza la esperanza  $E[\log p(Y|h')]$  siendo  $p(Y|\theta)$  la distribución de probabilidad que define  $Y$  y que depende de los parámetros desconocidos  $\theta$ , la cual define la verosimilitud de los datos completos  $Y$  dada una hipótesis de los parámetros ocultos. Cuando se maximiza el logaritmo de la PDF, se está maximizando la verosimilitud.

Se introduce entonces el valor esperado  $E[\log p(Y|h')]$  dado que el conjunto de datos  $Y$  es una variable aleatoria, ahora se debe de considerar los posibles valores que pueda tomar  $X$  al ponderarlos con base en su probabilidad. La pdf de  $Y$  está determinada por los valores estimados por el parámetro  $\theta$ . Por ello el algoritmo EM usa la hipótesis actual para estimar la distribución de  $Y$ . Se define entonces una función de  $Q(h|h')$  que proporciona  $E[\log p(Y|h')]$  como una

(33)

función de  $h'$ , bajo la suposición de que  $h = \theta$  y a partir del conjunto de observaciones de  $Z$  del conjunto completo de  $Y$ .

$$Q(h|h') = E[\log p(Y|h')|h, Z]$$

En la función  $Q(h|h')$  se considera que la  $h'$  y los datos observados  $Z$  tiene unos valores fijos y que estos definen la PDF de las variables ocultas  $X$  y consecuentemente también a los valores esperados. En resumen, el algoritmo EM realiza iteraciones sucesivas hasta que converge según:

1.- Estimación de la esperanza (E): Se calcula  $Q(h|h')$  al utilizar la hipótesis actual  $h$  y los datos observados  $Z$  para estimar la distribución de probabilidad de  $Y$

$$Q(h|h') \leftarrow E[\log p(Y|h')|h, Z] \quad (34)$$

2.- Maximización (M): Sustitución de  $h$  por la  $h'$  que maximiza la función  $Q$

$$h \leftarrow \operatorname{argmax} Q(h|h') \quad (35)$$

## 2.12 Aplicación del algoritmo EM de múltiples variables gaussianas

En el caso de tener datos bivariados se considera la aplicación del algoritmo EM para la obtención de parámetros de la PDF gaussiana bivariada. Dichos parámetros son: la probabilidad de pertenecer a una de las gaussianas  $\varpi_j$ , caracterizada por su media  $\mu_j$  y su matriz de covarianzas  $\Sigma_j$ .

La característica inicial para la aplicación del algoritmo EM es la asignación de valores iniciales a los parámetros mencionados, es decir para  $\varpi_j^{(0)}, \mu_j^{(0)}, \Sigma_j^{(0)}, j = 0, 1, \dots, k$  y calcular la primer máxima verosimilitud

$$L^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left( \sum_{j=1}^k \varpi_j^{(0)} \phi(y_i / \mu_j^{(0)}, \Sigma_j^{(0)}) \right)$$

El siguiente paso consiste en la estimación (E) de la función masa de probabilidad

$$\gamma_{ij}^{(m)} = \frac{\varpi_j^{(m)} \phi(y_i | \mu_j^{(m)}, \Sigma_j^{(m)})}{\sum_{l=1}^k \varpi_l^{(m)} \phi(y_i | \mu_l^{(m)}, \Sigma_l^{(m)})}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k, \quad (36)$$

seguido de la maximización (M)

$$\begin{aligned} \varpi_j^{(m+1)} &= \frac{n_j^{(m)}}{n}, \quad j = 1, \dots, k \\ n_j^{(m)} &= \sum_{i=1}^n \gamma_{ij}^{(m)}, \quad j = 1, \dots, k \\ \mu_j^{(m+1)} &= \frac{1}{n_j^{(m)}} \sum_{i=1}^n \gamma_{ij}^{(m)} y_i, \quad j = 1, \dots, k \end{aligned} \quad (37)$$

$$\sum_j^{(m+1)} = \frac{1}{n_j^{(m)}} \sum_{i=1}^n \gamma_{ij}^{(m)} (y_i - \mu_j^{(m+1)}) (y_i - \mu_j^{(m+1)})^T, \quad j = 1, \dots, k$$

Finalmente se revisa la convergencia de los parámetros al comparar la máxima verosimilitud

$$L^{(m+1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left( \sum_{j=1}^k \varpi_j^{(m+1)} \phi(y_i | \mu_j^{(m+1)}, \Sigma_j^{(m+1)}) \right) \quad (38)$$

Si  $|L^{(m+1)} - L^{(m)}| > \delta$  para un valor preestablecido de  $\delta$ , se termina el algoritmo.

Este es el procedimiento para determinar del conjunto de datos cuales son los pertenecientes a una determinada gaussiana de la familia de estas. Una de las aplicaciones de este algoritmo EM aplicado a las gaussianas es el de localizar el centroide  $\mu$  de la distribución de datos

datos, conocido como agrupamiento (clustering en idioma inglés). En la figura 8 se puede entender el proceso de agrupamiento.

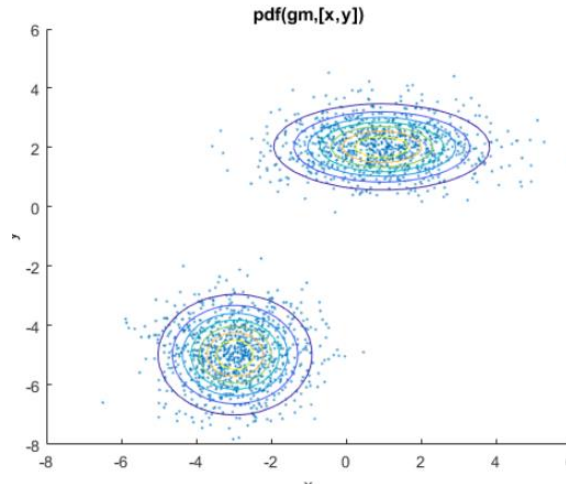


Figura 8 Aplicación del algoritmo EM en el agrupamiento de datos (Matlab® R2018b)

### 2.12.1 Ejemplo introductorio (Tood K. & stirling C., 2000)

Supóngase que, en un problema de reconocimiento de imágenes, se tienen dos clases de figuras que tenemos que distinguir: una clase de objetos oscuros y una clase de objetos claros, la clase de objetos oscuros puede subdividirse en dos formas: redondo y cuadrado. Deseamos determinar la probabilidad de reconocer un objeto oscuro. Además, se sabe que los objetos se distribuirán binomialmente. Deje que la variable aleatoria  $x_1$  represente el número de objetos oscuros redondeados,  $x_2$  represente el número de objetos oscuros cuadrados y  $x_3$  represente el número de objetos claros y dejar  $[x_1, x_2, x_3]^T = x$  será el vector de valores que toman las variables aleatorias para alguna imagen. La función de distribución trinomial general es

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \left( \frac{n!}{x_1! \cdot x_2! \cdot x_3!} \right) P_1^{x_1} P_2^{x_2} P_3^{x_3}.$$

Donde  $n = x_1 + x_2 + x_3$  y  $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ . Los parámetros de la distribución son  $P_1, P_2$  y  $P_3$ . Sin embargo, suponemos que se sabe lo suficiente sobre las probabilidades de las diferentes clases para que la probabilidad pueda escribirse como:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \left( \frac{n!}{x_1! \cdot x_2! \cdot x_3!} \right) \left( \frac{1}{4} \right)^{x_1} \left( \frac{1}{4} + \frac{p}{4} \right)^{x_2} \left( \frac{1}{2} - \frac{p}{4} \right)^{x_3} \quad (39)$$

$$= f_x(x_1, x_2, x_3 | p)$$

Donde  $p$  es ahora el único parámetro desconocido de la distribución. Supóngase también que por alguna razón no es posible distinguir cada una de las clases de objetos por separado. A conveniencia, suponemos que se emplea un extractor de características que puede distinguir qué objetos son claros y cuáles son oscuros, pero no puede distinguir la forma. Sea  $[y_1, y_2]^T = y$  el número de objetos oscuros y el número de objetos claros detectados, respectivamente, de modo que  $y_1 = x_1 + x_2$  y  $y_2 = x_3$ . Así mismo, las variables aleatorias correspondientes sean  $y_1$  y  $y_2$ . Existe un mapeo de varios a uno entre  $x_1, x_2$  y  $y_1$ . Por ejemplo, si  $y_1 = 3$ , no hay forma de saber por las mediciones si  $x_1 = 1$  y  $x_2 = 2$  o  $x_1 = 2$  y  $x_2 = 1$ . El algoritmo EM está específicamente diseñado para problemas con asignaciones uno a uno. Basándose en observaciones  $y_1$  y  $y_2$  se desea determinar una estimación de la máxima verosimilitud de  $p$ , el parámetro de la distribución. La variable aleatoria  $Y_1 = X_1 + X_2$  se distribuye entonces binomialmente como

$$P(Y_1 = y_1 | p) = \binom{n}{y_1} \left( \frac{1}{4} + \frac{p}{4} \right)^{y_1} \left( \frac{1}{2} - \frac{p}{4} \right)^{n-y_1}$$

En este caso, sería posible calcular una estimación ML de  $p$  resolviendo

$$P_{ML} = \operatorname{argmax} g(Y_1 = y_1 | p).$$

Tal estimación directa no siempre es posible. La idea clave detrás del algoritmo EM es que, incluso cuando se lleva a cabo el algoritmo EM, se conoce que  $x_1$  y  $x_2$  es de la forma de la distribución subyacente  $f_x(x_1, x_2 | p)$  y puede usarse para determinar una estimación de  $p$ . Esto se hace al estimar primero los datos subyacentes, en este caso  $x_1$  y  $x_2$ ; luego se usarán estos datos para actualizar la estimación del parámetro en cuestión. Esto se repite hasta alcanzar la convergencia. Se deja  $p^{[k]}$ , la cual indica la estimación  $p$  después de la iteración  $k$ , donde  $k = 1, 2, \dots, m$ . Se supone entonces un valor del parámetro inicial  $p^{[0]}$ , y se desarrolla entonces el algoritmo EM que consta de los dos pasos principales siguientes:

- 1) La estimación o esperanza de la variable desconocida

Calcule el valor esperado de los datos  $x$  usando la estimación actual del parámetro y los datos observados. El valor esperado de  $x_1$  teniendo la medida  $y_1$  y basándonos en la estimación actual del parámetro, la podemos calcular como  $x_1^{[k+1]} = E[x_1 | y_1, p^{[k]}]$ .

$$x_1^{[k+1]} = y_1 \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{p^{[k]}}{4}} \quad (40)$$

Similarmente

$$x_2^{[k+1]} = E[x_2 | y_1, p^{[k]}] = y_1 \frac{\frac{1}{4} + \frac{p^{[k]}}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{p^{[k]}}{4}} \quad (41)$$

En este ejemplo,  $x_3$  se conoce explícitamente y no necesita ser estimado.

2) La maximización de la verosimilitud

Utilice los datos del paso anterior, para determinar una estimación ML del parámetro. Los datos estimados a veces se denominan datos imputados.

En este ejemplo,  $x_1^{[k+1]}$  y  $x_2^{[k+1]}$  son imputados y  $x_3$  es disponible. La estimación ML del parámetro se obtiene tomando la derivada de  $\log f(x)(x_1^{[k+1]}, x_2^{[k+1]}, x_3|p)$  con respecto a  $p$  igualando a cero, y resolviendo para  $p$

$$0 = \frac{d}{dp} \log f_x(x_1^{[k+1]}, x_2^{[k+1]}|p)$$

$$\rightarrow p^{[k+1]} = \frac{2x_2^{\{k+1\}} - x_3}{x_2^{\{k+1\}} + x_3} \quad (42)$$

La estimación  $x_1^{\{k+1\}}$  no es usada en (41) y por lo tanto no es necesario calcularla. El algoritmo EM consta de iteraciones (41) y (42) hasta la convergencia. Al sustituir (40) en (42) puede obtenerse una actualización en un solo paso.

$$p^{[k+1]} = \frac{p^{\{k\}}(4y_1 - 2x_3) + 2y_1 - 2x_3}{p^{\{k\}}(2y_1 + 2x_3) + y_1 + 2x_3} \quad (43)$$

Como un ejemplo numérico supongamos que el verdadero parámetro es  $p = 0.5$  y  $n = 100$ . Se extraen las muestras, con  $y_1 = 63$  (los valores verdaderos de  $x_1$  y  $x_2$  son 25 y 38, respectivamente, pero el algoritmo no lo sabe).

Los resultados de estos cálculos se muestran en la tabla 1. A partir de  $p^{\{0\}} = 0$ . La estimación final  $p^* = 0.52$  es, de hecho, la estimación ML de  $p$  que se habría obtenido maximizando con respecto a  $p$  si los datos  $x$  hubieran estado disponibles. El algoritmo correspondiente a este ejemplo se encuentra en el Anexo 1.

*Tabla 1.* Resultados de las iteraciones hasta la convergencia

$k$	$x_1^{\{k\}}$	$x_2^{\{k\}}$	$p^{\{k\}}$
1	31.500000	31.500000	0.379562
2	26.475460	36.524540	0.490300
3	25.298157	37.701843	0.514093
4	25.058740	37.941260	0.518840
5	25.011514	37.988486	0.519773
6	25.002255	37.997745	0.519956
7	25.000441	37.99959	0.519991
8	25.000086	37.999914	0.519998
9	25.000017	37.999983	0.520000
10	25.000003	37.999997	0.520000

### 2.13 Algoritmo de maximización de la esperanza para la determinación directa de la posición (EM-DPD)

En las subsecuentes líneas se adapta el método propuesto por Tzoreff y Weiss (2017) a la localización del epicentro al considerar las estaciones sísmicas como los sensores receptores de las señales electromagnéticas emitidas por el misil que a su vez es análogo al epicentro de un sismo.

En el algoritmo EM-DPD se determinan las posiciones de las estaciones sísmicas en un plano 2D, como se muestra en la figura 9 y se propone una posición del epicentro como una primera estimación (Principio de máxima verosimilitud).

La posición propuesta para el desarrollo del algoritmo es seleccionada de manera aleatoria dentro de una zona congruente. Las señales adquiridas por las estaciones sísmicas son tratadas por la Transformada Hilbert, la señal observada por la  $i$ -ésima estación se define como

$$\bar{y}_i(t) = \alpha_i \bar{s}(t - \tau_i(p_t) - \tau_0) + \bar{n}_i(t)$$

Donde  $\alpha_i$  es un escalar complejo que representa la atenuación,  $\bar{s}(t - \tau_i(p_t) - \tau_0)$  es la forma de onda de la señal en función del tiempo, transmitido en  $\tau_0$  y retrasado por  $\tau_i(p_t)$ . El ruido es representado por  $\bar{n}_i(t)$ . Con la finalidad de separar el retraso  $\tau_i(p_t)$ , se transforma la señal compleja al dominio de la frecuencia

$$y_i(k) = \alpha_i s(k) e^{-j\omega_k(\tau_i(p_t) + t_0)} + n_i(k), \quad \omega_k = \frac{2\pi}{T} k$$

Ordenando en forma matricial

$$\mathbf{y}_i = \alpha_i \mathbf{A}_i \mathbf{s} + \mathbf{n}_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (45)$$

Donde

$$\mathbf{y}_i = [y_i(1) + y_i(2), \dots, y_i(N_s - 1)]^T$$

$$\mathbf{s} = [s(1) + s(2), \dots, s(N_s - 1)]^T$$

$$\mathbf{n}_i = [n_i(1) + n_i(2), \dots, n_i(N_s - 1)]^T$$

$$\mathbf{A}_i = \text{diag}\{e^{-j\omega_0(\tau_i + t_0)}, \dots, e^{-j\omega_{N_s-1}(\tau_i + t_0)}\}$$

Donde **diag** se refiere a la diagonal principal de una matriz cuadrada, además se definen las variables

$$d_i = c\tau_i(p_t) = \|p_i - p_t\| \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

$$d_0 = ct_0 \quad ; \quad g_i = A_i s$$

Donde  $c$  es la velocidad de propagación de onda y  $\|p_i - p_t\|$  la norma euclidiana, entonces la función de densidad de probabilidad está dada por

$$p_y(y_i; p_t, d_0) = (\pi\sigma^2)^{-N_s} e^{-\frac{\|y_i - \alpha_i g_i\|^2}{\sigma^2}} \quad (46)$$

Al considerar que las estaciones sísmicas son independientes y que  $\mathbf{Y} = \{y_i\}_{i=1}^N$ , entonces

$$p_y(\mathbf{Y}; p_t, d_0) = \prod_{i=1}^N p_y(y_i; p_t, d_0) \propto \prod_{i=1}^N e^{-\sigma^2 \|y_i - \alpha_i g_i\|^2} \quad (47)$$

Se observará que los  $N$  parámetros complejos,  $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$  serán eliminados durante el proceso, por lo que el paso de maximización se resuelve sobre 4 parámetros reales; las 3 coordenadas de el vector  $p_t$  y el parámetro  $d_0$ , lo cual lleva a una búsqueda en 4 dimensiones. Si el número de coordenadas del sensor (epicentro) es solo dos, se requiere una búsqueda tridimensional. Siendo así, se procede a la derivación del algoritmo EM-DPD.

Para esta investigación los datos completos son  $\mathbf{Y} = \{y_i\}_{i=1}^N$  corresponden a los registros realizados por las estaciones sísmicas, los parámetros a ser estimados son  $\theta = [p_t^T, \phi^T]^T$  donde  $\phi \triangleq [d_0, \alpha^T]^T$  es el vector de los parámetros que contribuyen a la falta de información en el proceso y  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^T$ , es el vector de los coeficientes de atenuación,  $X = \{x_i\}_{i=1}^N$  donde  $x_i$  esta normalmente distribuida con media  $p_i - p_t$  y una matriz de covarianza con diagonal  $\sigma_x^2 I$ , entonces las variables definidas se pueden reescribir como:

$$d_i = c\tau_i(p_t) = \|p_i - p_t\| = \|x_i\| \quad (48)$$

$$g_i(\|x_i\|, d_0) = \mathbf{A}_i(\|x_i\|, d_0) \mathbf{s}$$

Por lo tanto

$$y_i = \alpha_i g_i(\|x_i\|, d_0) + n_i \quad (49)$$

Con la finalidad de obtener la probabilidad condicional se reescribe la función de probabilidad (47) como

$$P_{Y|T}(Y|X; \phi) = \prod_{i=1}^N p_{y/x}(y_i|x_i, d_0, \alpha_i) \propto \prod_{i=1}^N e^{-\sigma^2 \|y_i - \alpha_i g_i\|^2} \quad (50)$$

En donde  $g_i \equiv (\|x_i\|, d_0)$ . Hay que notar que la probabilidad condicional  $P_{Y|T}(Y|X; \phi)$  es la función de probabilidad del conjunto de datos incompletos dado el conjunto de datos completos  $X$ , en donde los datos incompletos se refiere a conocer todas las posiciones, desde el transmisor (epicentro) hasta las estaciones sísmicas, los datos completos son los puntos ya conocidos (estaciones sísmicas) y  $P_{y|x}(\cdot)$  es la PDF de un único registro de datos  $y_i$ , dado un vector  $x_i$ . Si se asume que  $x_i$  esta normalmente distribuido, entonces

$$P_X(X, p_t) = \prod_{i=1}^N p_x(x_i; p_t) = \prod_{i=1}^N \mathcal{N}(\mu_i(p_t), \sigma_x^2 I) \quad (51)$$

Donde  $\mu_i(p_t) = p_i - p_t$ , y  $\sigma_x^2$  denota la varianza de las coordenadas del transmisor, la cual controla la tasa de convergencia del algoritmo. Por lo tanto, se establece como un parámetro en el proceso de maximización.

Así mismo, se comprueba la separabilidad de la función de probabilidad para la aplicación del algoritmo EM y justificar la compatibilidad para la obtención del EM-DPD.

La función auxiliar  $Q(\theta, \theta')$  es separable en  $p_i$  y  $\phi$ , es decir

$$Q(\theta, \theta') = Q_1(\phi, \phi') + Q_2(p, p_1') \quad (52)$$

Se elige el conjunto de variables latentes  $X$ , y de acuerdo con (48) se descompone la probabilidad conjunta  $P_{X,Y}$  en dos factores; la distribución anterior (52) que depende solamente de  $P_i$  y la función de probabilidad (48) que depende solamente de  $\phi$ . Considérese el registro de  $P_{X,Y}$ , y del cual se obtiene como resultado la separación deseada de la función auxiliar  $Q(\theta, \theta')$ . Al sustituir (48) y (49) en  $Q_1(\phi, \phi')$  y  $Q_2(p, p')$  queda

$$Q_1(\phi, \phi') = -\sigma^{-2} \sum_{n=1}^N E \|y_i - \alpha_i g_i\|^2 + C_1 \quad (53)$$

$$Q_2(p, p'_1) = -0.5\sigma_x^{-2} \sum_{n=1}^N E \|x_i - \mu_i(p_t)\|^2 + C_2 \quad (54)$$

Donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes independientes de los parámetros. Se procede entonces a eliminar el vector de factores de atenuación  $\alpha$  del proceso de optimización mediante la sustitución de  $\alpha$  con el maximizador

$$\hat{\alpha} = \operatorname{argmax} Q_1(\phi, \phi') \rightarrow \hat{\alpha}_i = \frac{\bar{g}_i^{-H} y_i}{E_S} \quad ; \forall i = 1, \dots, N \quad (55)$$

Donde  $\bar{g}_1 \equiv E\{g_i\}$  y  $E_S \equiv \|s\|^2 = \|g_i\|^2$ . Al sustituir nuevamente (55) en (53) tenemos

$$Q_{1.c}(d_0, d'_0) = -\sigma^{-2} \sum_{n=1}^N y_i^H \Pi_i(d_0) y_i + C_1 \quad (56)$$

Donde  $\Pi_i \equiv I_N - E_S^{-1} \bar{g}_i \bar{g}_i^H$ . Al repetir las iteraciones EM,  $\alpha$  es eliminada de la función auxiliar, y así se usa la notación  $Q_{1.c}(d_0, d'_0)$  para enfatizar que  $Q(\cdot, \cdot)$  se calcula con respecto a  $\alpha$ .

Se continua con el paso de maximización que lleva a la siguiente proposición:

El paso de maximización sobre  $Q_2(p_t, p_t')$  resulta en una solución de forma cerrada para  $p_t$ . Al maximizar (54) con respecto a  $p_i$  y el uso de la definición de  $\mu(p_t)$  en (51) queda

$$\hat{p}_t = \underset{p_t}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^N \|p_i - p_t\|^2 - 2p_t^T \bar{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (p_i - \bar{x}_i) \quad (57)$$

que es la solución trivial de la minimización de una función cuadrática. Nótese que si se usa la notación  $\bar{x}_i \equiv E\{x_i\}$ . Similarmente  $d_0$  es obtenido de la maximización de  $Q_{1,c}(d_0, d_0')$  que lleva a

$$\hat{d}_0 = \underset{d_0}{\operatorname{argmax}} \sum_{n=1}^N |y_i^H \bar{g}_i(d_0)|^2 \quad (58)$$

En general (58) no tiene una solución de forma cerrada, por lo que complementa a las ecuaciones empleadas por el algoritmo EM, el cual consiste en la evaluación de las expresiones  $\bar{x}_i, \bar{g}_i$  para poder estimar (55) y (56), respectivamente.

Finalmente se pueden establecer las ecuaciones del EM para el método DPD

#### 1) Paso de estimación

$$r_i^* = \underset{r_i}{\operatorname{argmax}} -\frac{r_i^2}{2} + R_i r_i - \lambda \|y_i - \hat{a}_i g_i(r_i)\|^2 \quad (59)$$

*tal que*  $r_i \geq 0; \forall i = 1, \dots, N$

## 2) Paso de maximización

$$p_t^{(k+1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ p_i \left( 1 - \frac{r_i^*}{R_1} \right) + \frac{r_i^*}{R_1} p_t^{(k)} \right] \quad (60)$$

Donde  $\hat{\alpha}_i$  se da en (53). Considérese que el paso de estimación (E) se reduce a una maximización sobre  $r_i$ , esto implica que el EM actúe como un algoritmo de ascenso coordinado mediante la aplicación de la maximización (paso 2) sucesiva con respecto a los diferentes parámetros de cada paso. Téngase en cuenta que la maximización sobre  $r_i$  en el paso 1 requiere solamente una búsqueda en línea. En la figura 9 se muestra el proceso general para la aproximación del epicentro.

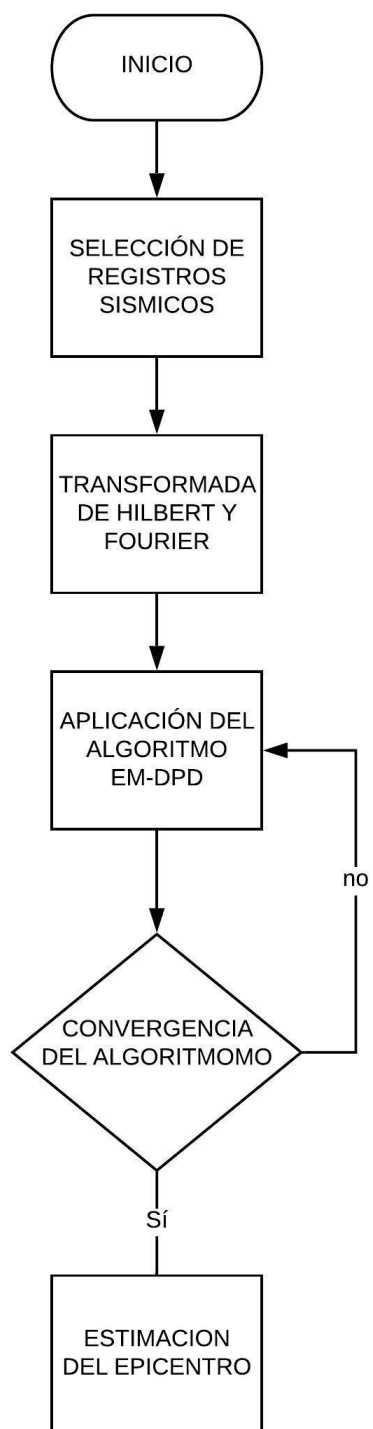


Figura 9 Proceso general para el cálculo del epicentro

## **Capítulo 3. Metodología**

### **3.1 Posicionamiento de las estaciones sísmicas dentro de la zona de convergencia**

El desarrollo de esta investigación se inició al implementar una de las señales registradas del sismo de Japón del 14 de junio del 2008. Dicho sismo presentó una latitud de 39.028 km, una longitud de 140.880 km, magnitud de 7.2 en la escala local, una profundidad de 8 km y fue debido a varias fallas activas que existen al sur de la prefectura de Miyagi y al norte de la prefectura de Iwate (“Terremoto del interior de Iwate-Miyagi de 2008 - Wikipedia, la enciclopedia libre,” n.d.), a partir de la cual se obtuvieron dos señales más, ambas modificadas en fases y amplitudes. Esto, con la finalidad de asegurar de que se trata de una señal de la misma fuente. Además, se les asignó una posición de las estaciones instaladas en la red K-NET, dado que el algoritmo EM-DPD a ser aplicado requiere de posiciones de las estaciones sísmicas (sensores).

### **3.2 Adaptación de una señal sísmica de la red K-net al dominio de Hilbert y Fourier**

La posición de cada estación para este primer desarrollo se denota en la tabla 3. Así mismo en la figura 10 se observan las posiciones de varias estaciones sísmicas. Las que están señaladas con un círculo rojo son las empleadas en este ejemplo.

El algoritmo DPD propuesto por Weiss (2004), usado generalmente para señales de radio frecuencia, requiere que los datos colectados por las estaciones sísmicas sean procesadas por la Transformada Discreta de Fourier (Isbi, 2005). El algoritmo DPD es considerado como un estimador de mínimos cuadrados que inicia con la determinación de la señal envolvente de la onda sísmica a través de la transformada de Hilbert (HT). Esta transformada, no cambia la representación de la señal al llevarla de un dominio a otro, sino que genera de manera única otra señal con características adicionales a la original.

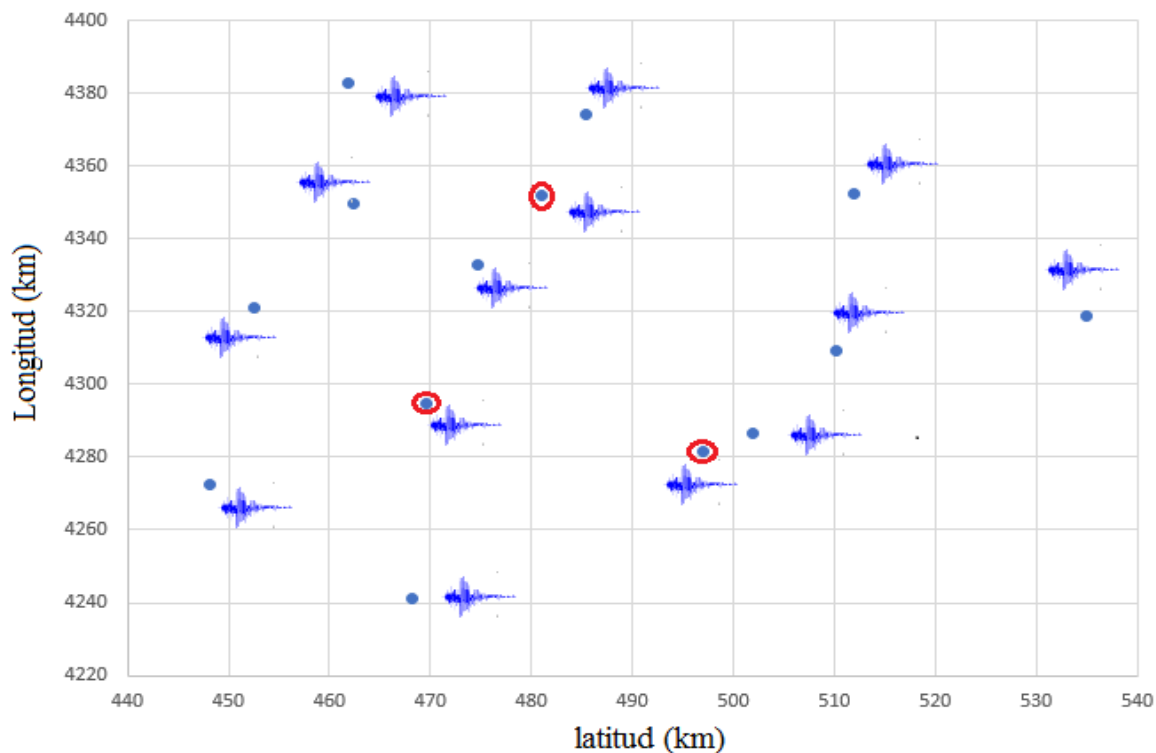


Figura 10 Posicionamiento de las estaciones sísmicas cercanas al origen del sismo del 14 de junio del 2008 en Japón

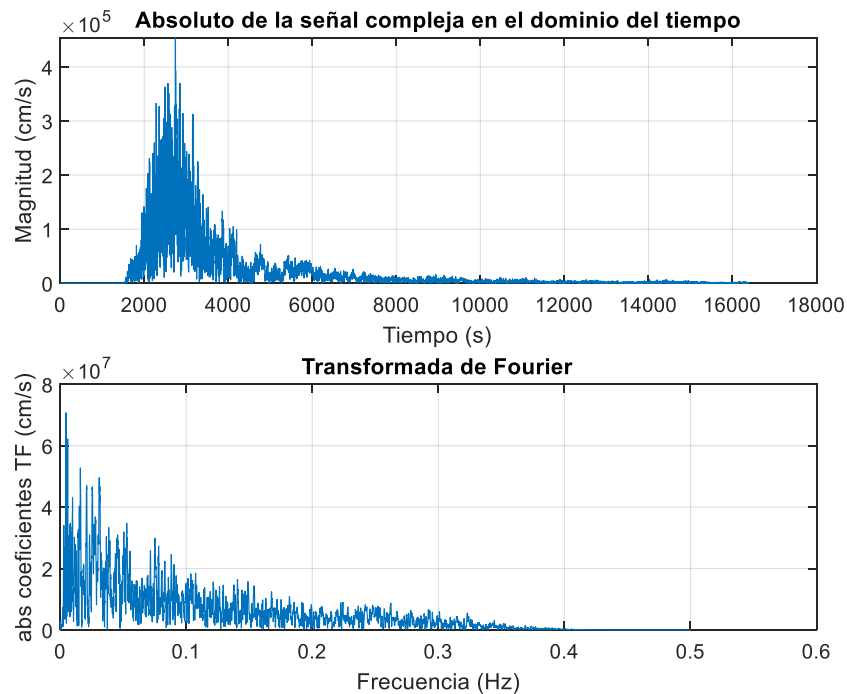
Toda vez que se cuenta con la HT de señal, esta se lleva al dominio de la frecuencia por medio de la FFT (transformada rápida de Fourier) que equivale a omitir las componentes espectrales de la señal con la misma amplitud, pero desfasadas por  $\pm \frac{\pi}{2}$ , según las características de la función.

### 3.3 Aplicación del algoritmo EM-DPD a tres señales obtenidas a partir de la variación en magnitud y fase de una señal

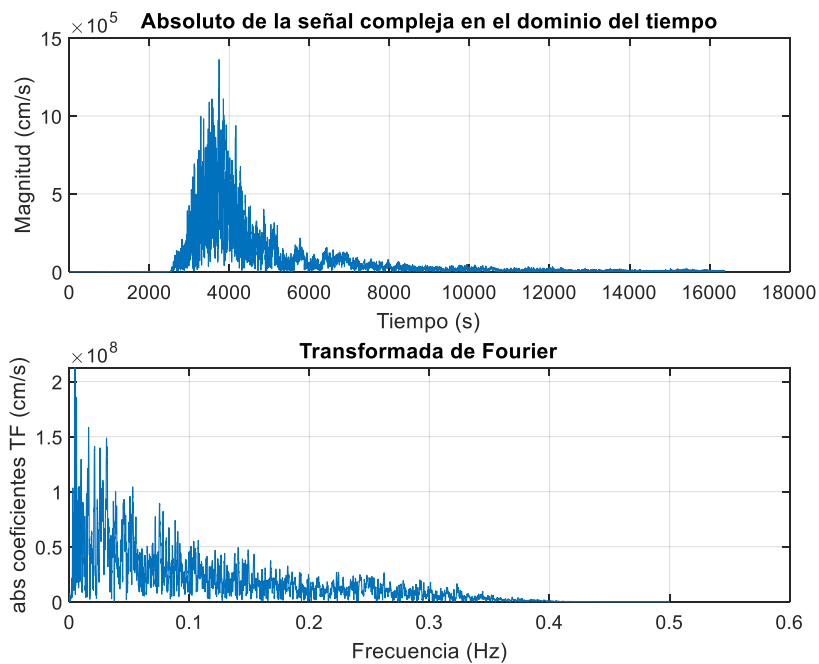
Para el inicio del desarrollo del algoritmo EM-DPD se propone trabajar con una señal registrada por solo una estación sísmica modificándole en magnitud y fase. Dichas señales iniciales se muestran en la figura 11, desfasadas en fase por 1 y dos segundos, en amplitud fueron modificadas por un factor de 3 y de 5 respectivamente en b y c. y sus transformadas de Hilbert y

Fourier. Las modificaciones realizadas a la señal se realizaron con la finalidad de asegurar una zona de convergencia al considerar una misma fuente.

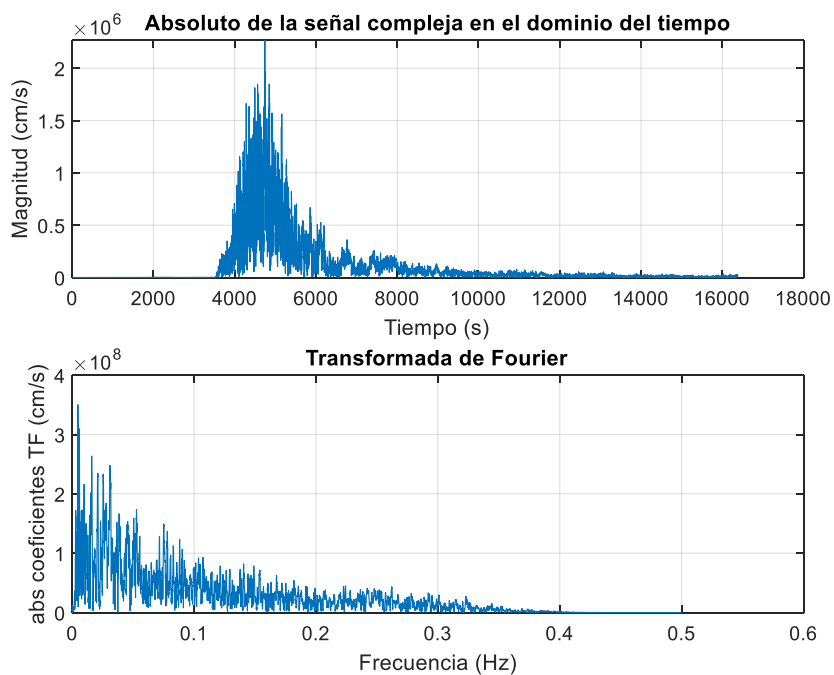
La transformada de cada una de las señales produce una función que denota 3 características, en donde  $\alpha_i$  corresponde a la amplitud y fase de la onda,  $A_i$  únicamente a la parte de las fases, y  $s$  al espectro de amplitudes. Con estos datos se calculan los parámetros de la función de probabilidad  $E\{g_i\}$  (donde  $i$  corresponde al número estaciones sísmicas) que sirven para calcular las nuevas  $\hat{\alpha}_i$  que modifican la señal utilizada en el proceso del cálculo de la esperanza.



a) Estación sísmica IWT010a



b) Estación sísmica IWT010b



c) Estación sísmica IWT010c

*Figura 11* Transformadas de las señales iniciales alteradas en amplitud y fase del registro IWT010 para el primer desarrollo del algoritmo EM-DPD, diferenciadas por a, b y c.

Para aplicar el paso de la esperanza en el algoritmo (Paso E) se considera el argumento que maximice la función  $r_i$  y así obtener  $r_i^*$ , es decir, se calculan varios parámetros al ponderar los resultados de diferentes propuestas epicentrales. En esta investigación se utilizaron los puntos denotados en la tabla 2, en la figura 12 se aprecia la variación de los puntos propuestos respecto a una coordenada, cabe señalar que la variación es un eje porque se desea asegurar la convergencia en la zona deseada.

Para lograr la maximización de  $r_i$  se debe calcular la norma  $||x_i||$ , definida como la distancia que existe entre la estación sísmica  $x_i$  y cada uno de los puntos propuestos (Pte, semillas del algoritmo) como epicentros del sismo,  $R_i$  como la probabilidad de que la media probabilística sea la norma de una estación a un epicentro propuesto,  $\lambda$  es definida como la razón entre la covarianza de la posición de las estaciones y la varianza del ruido. Téngase en cuenta que  $\lambda$  influye en la velocidad de convergencia del algoritmo. Nótese que para este primer ejercicio se requiere de posicionar estaciones asociadas a señales modificadas en fase y amplitud a partir de una misma señal. Dichas posiciones se nombran como  $Pse_i$ , donde  $i = 1, 2, 3$ .

*Tabla 2.* Localización de epicentros propuestos para el paso de la esperanza

<b>Punto</b>	<b>Latitud (km)</b>	<b>Longitud (km)</b>
<b>Pte1</b>	468.1539	4491.1282
<b>Pte2</b>	468.1539	4941.1282
<b>Pte3</b>	468.1539	4591.1282
<b>Pte4</b>	468.1539	2541.1282
<b>Pte5</b>	468.1539	4191.1282
<b>Pte6</b>	468.1539	4741.1282

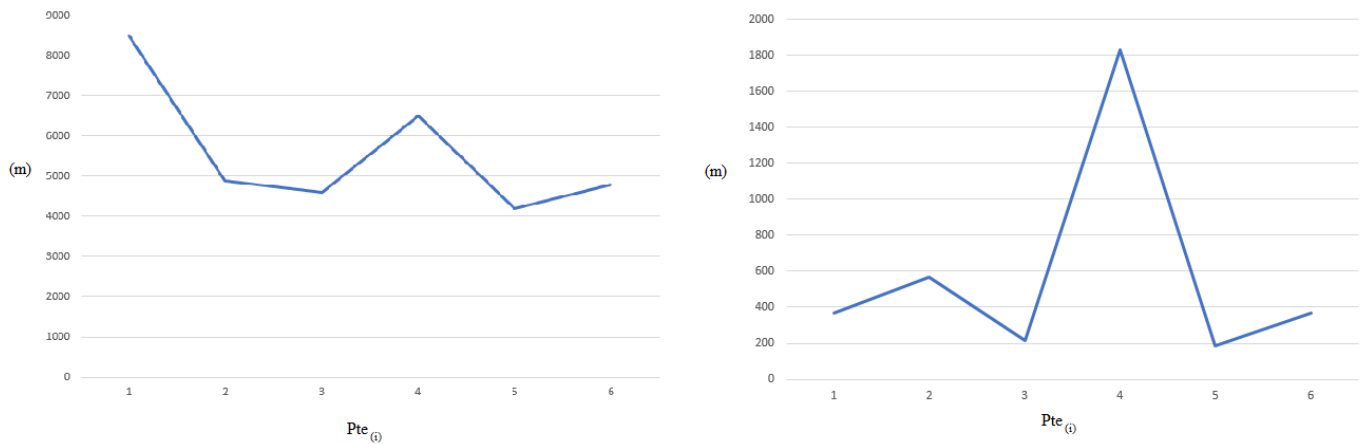


Figura 12 a) Variación del epicentro para la maximización de  $r(i)$  b) Respuesta para  $r_i^*$  como la maximización de  $r(i)$

Una vez determinada  $r_i^*$  se continua con el paso de la maximización (Paso M), en donde se obtiene, como se observa en la ecuación (60), un promedio del número de estaciones afectadas por la maximización  $r_i^*$ , la posición de la estación  $Pse_i$  y la posición epicentral propuesta que maximiza a  $r_i$ , que para este primer ejercicio ha resultado Pte4.

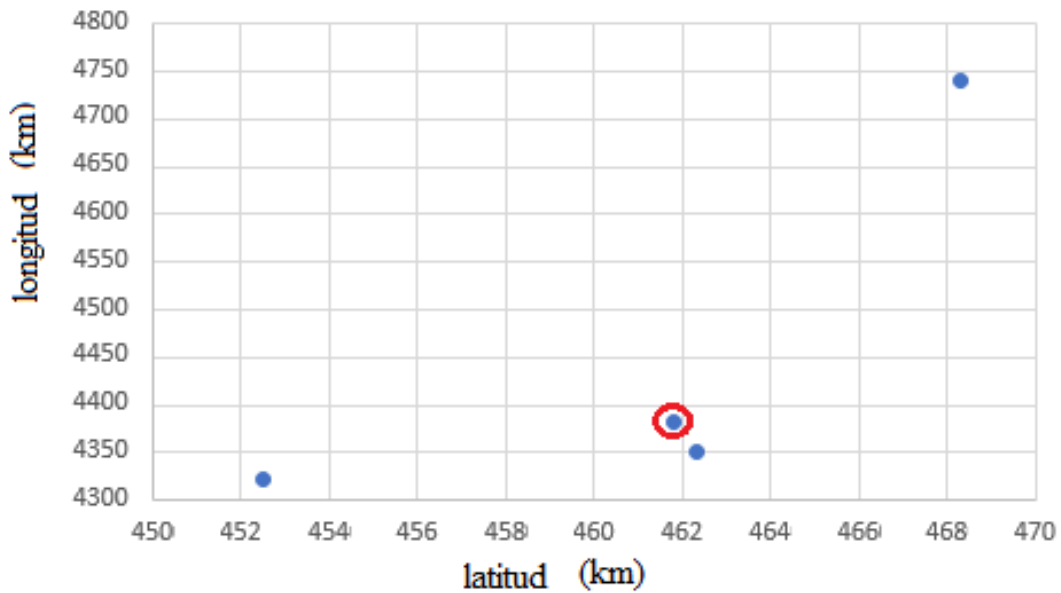


Figura 13 Epicentro del primer desarrollo en el algoritmo EM-DPD

### **3.4 Determinación del epicentro generado por el algoritmo EM-DPD con base en la señal modificada en amplitud y fase**

El resultado obtenido de este primer ejercicio es  $x=468.3$  km y  $y=4,741.6$  km, el cual, es un punto de convergencia dentro de la zona esperada. Se hace notar nuevamente que se trabajó con la señal de una sola estación sísmica generadora de otras dos señales (modificando su amplitud y fase) de estaciones ubicadas dentro de la zona, como se muestra en la figura 14.

Para el procesamiento de los datos y cálculo del epicentro se realizó utilizando una computadora con las siguientes características: procesador Intel core i5-5200 U @5200 GHz, memoria RAM 6 GB, sistema operativo de 64 bits, Windows 8.

### **3.5 Selección aleatoria de las señales de las estaciones sísmicas MYG005, MYG006 y IWT015**

Ahora se aplicará el algoritmo EM-DPD a las señales registradas por los sensores designados como MYG005, MYG006 y IWT01. En la tabla 3 se muestran 15 estaciones ordenadas por cercanía al epicentro, además, se trabajó con las direcciones en Este – Oeste de las tres registradas por cada estación sísmica. El algoritmo se aplicará a tres señales para ilustrar su eficacia, pero fácilmente es escalable a más estaciones, brindando una mejor precisión en la estimación del epicentro.

### **3.6 Adaptación de las señales sísmicas de los registros de las estaciones MYG005, MYG006 y IWT015 al dominio de Hilbert y Fourier**

Como se hizo en el primer ejemplo del algoritmo EM-DPD para las señales propuestas, se obtienen las transformadas de Hilbert y de Fourier para las 3 señales correspondientes a las estaciones sísmicas seleccionadas.

La propuesta para los puntos de  $Pte_i$  ya no solo tienen variación en un eje, ahora la propuesta es la posición de 3 estaciones cualesquiera de la tabla 3, en este caso las mencionadas.

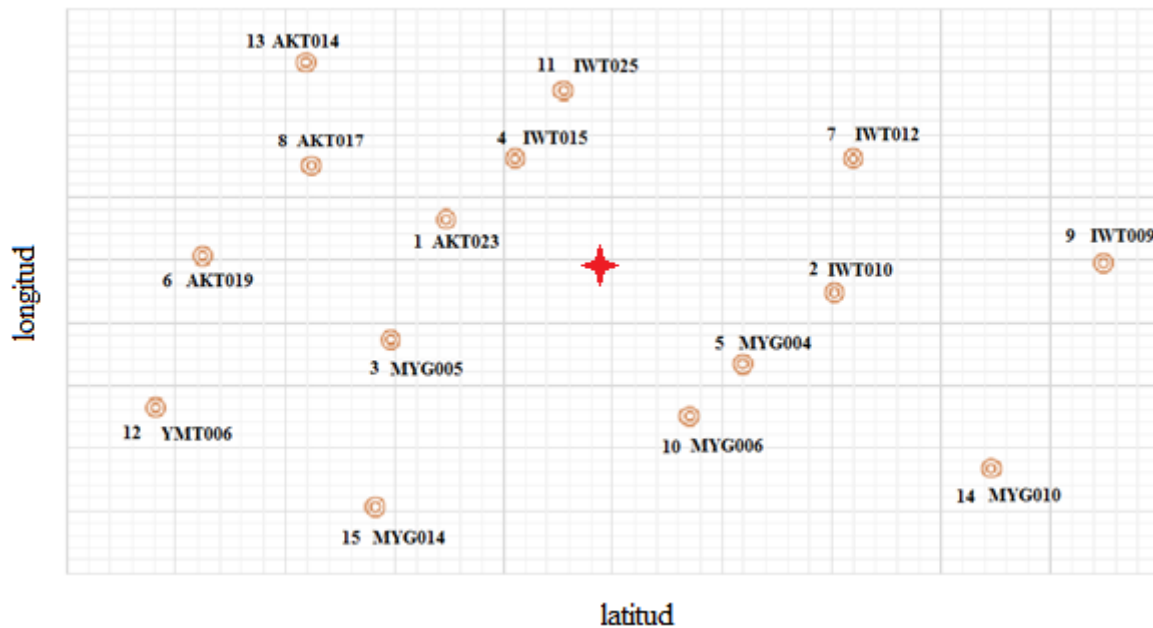


Figura 14 Visualización del posicionamiento de los sensores, enumerados por distancia, la estrella representa el epicentro real

Tabla 3. Posición de los sensores en la superficie terrestre

Sensor	Longitud (km)	Latitud (km)
AKT014	461,8257	4382,9022
AKT017	462,3097	4349,8824
AKT019	452,4867	4321,1813
AKT023	47,46895	4333,0416
IWT009	534,5348	4318,929
IWT010	510,1667	4309,3925
IWT012	511,8783	4352,3972
IWT015	480,9664	4352,0896
IWT025	485,3957	4374,1539
MYG004	501,8862	4286,7265
MYG005	469,6682	4294,5519
MYG006	496,9863	4681,539
MYG014	468,1539	4241,1282
YMT006	448,2238	4272,5684

## **Capítulo 4. Resultados y discusión**

### **4.1 Procesamiento de los datos de las estaciones sísmicas**

Los datos recabados de las estaciones sísmicas son procesados por la transformada de Hilbert y la transformada de Fourier en las figuras 15, 16 y 17 se muestra la señal en tiempo, la amplitud de la transformada de Hilbert y el espectro de amplitudes de la transformada de Fourier de los datos registrados por las estaciones IWT025, MYG005, y MYG006 respectivamente.

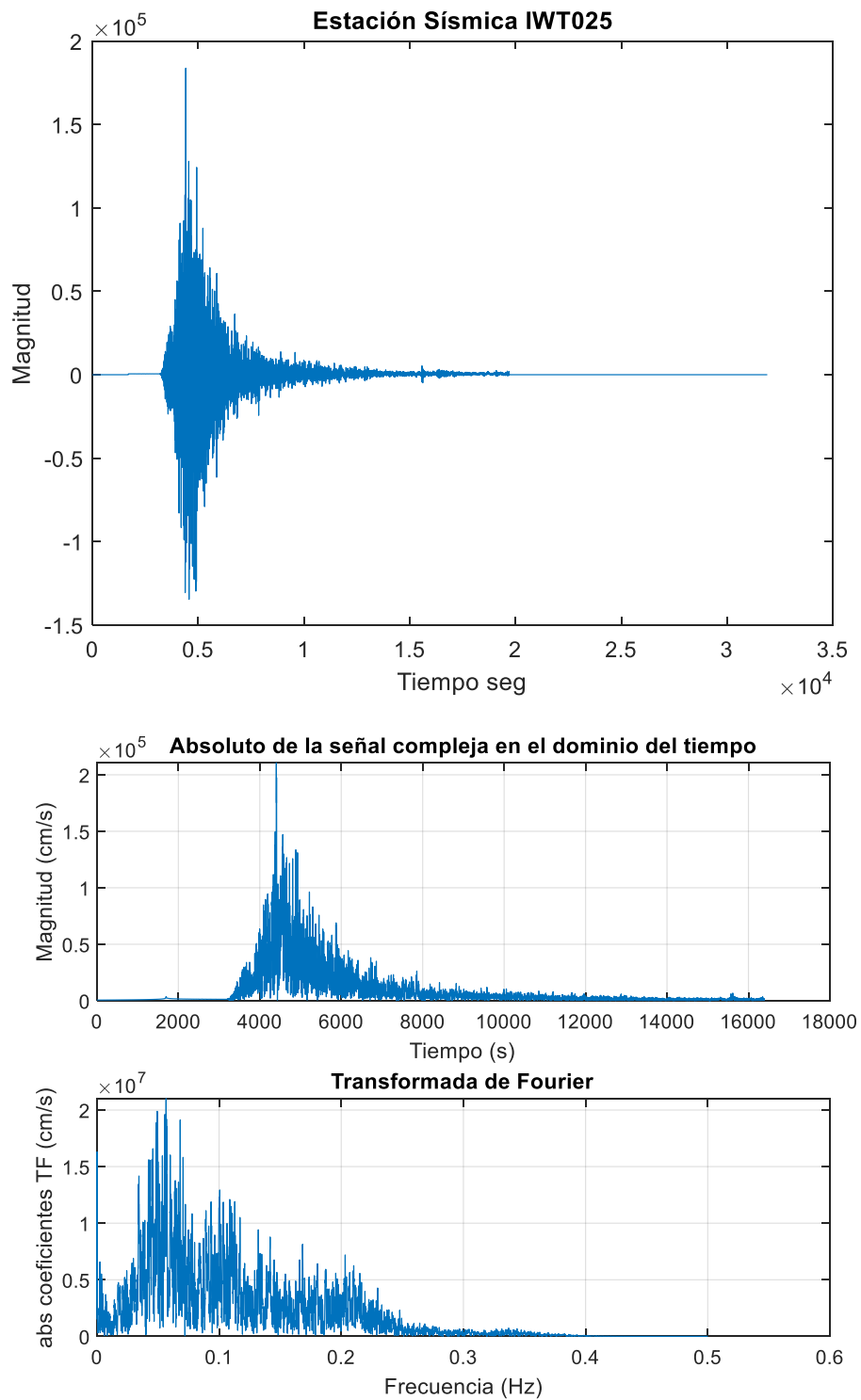


Figura 15 Señales correspondientes a la estación IWT025

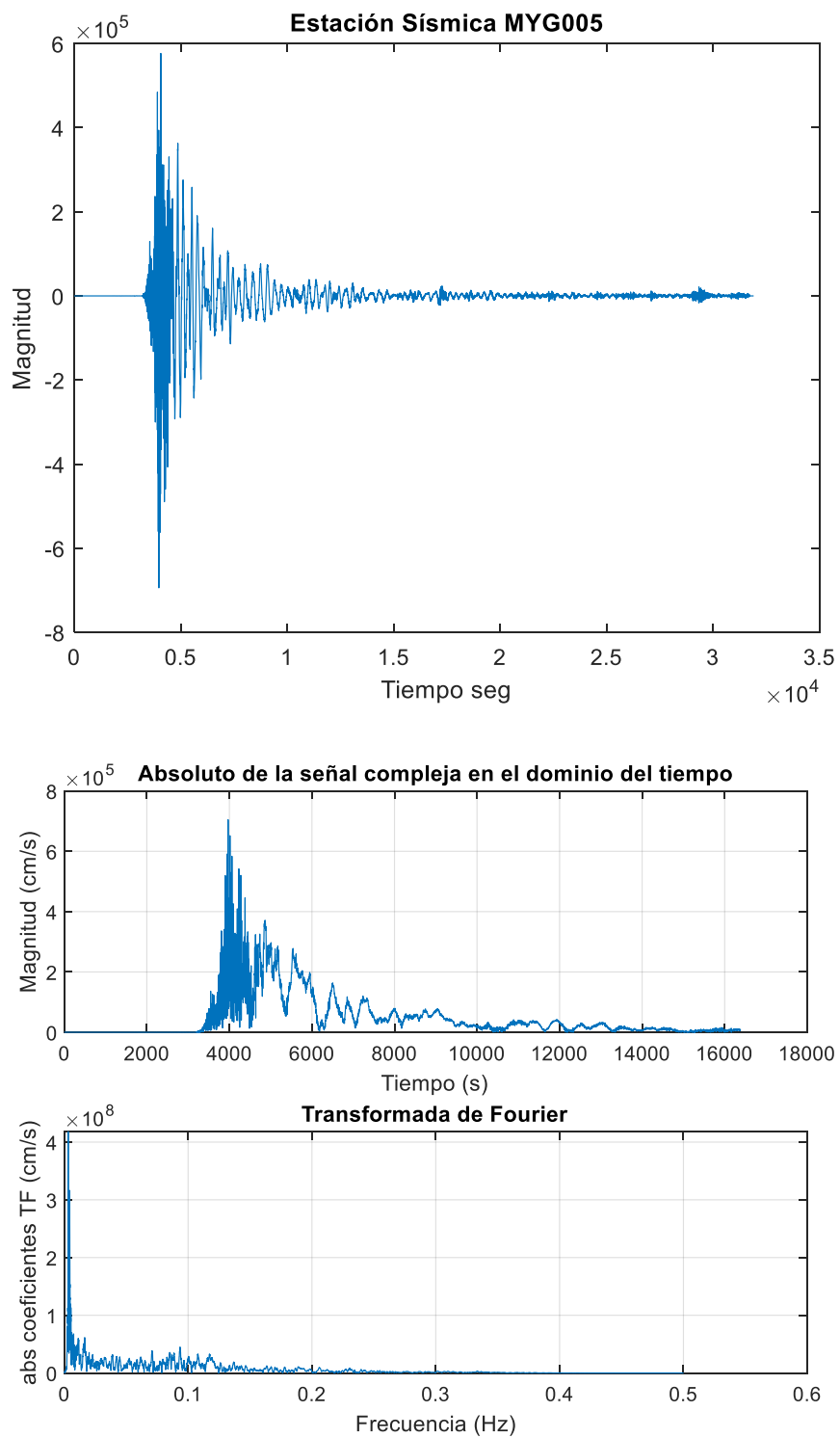


Figura 16 Señales correspondientes a la estación MYG005

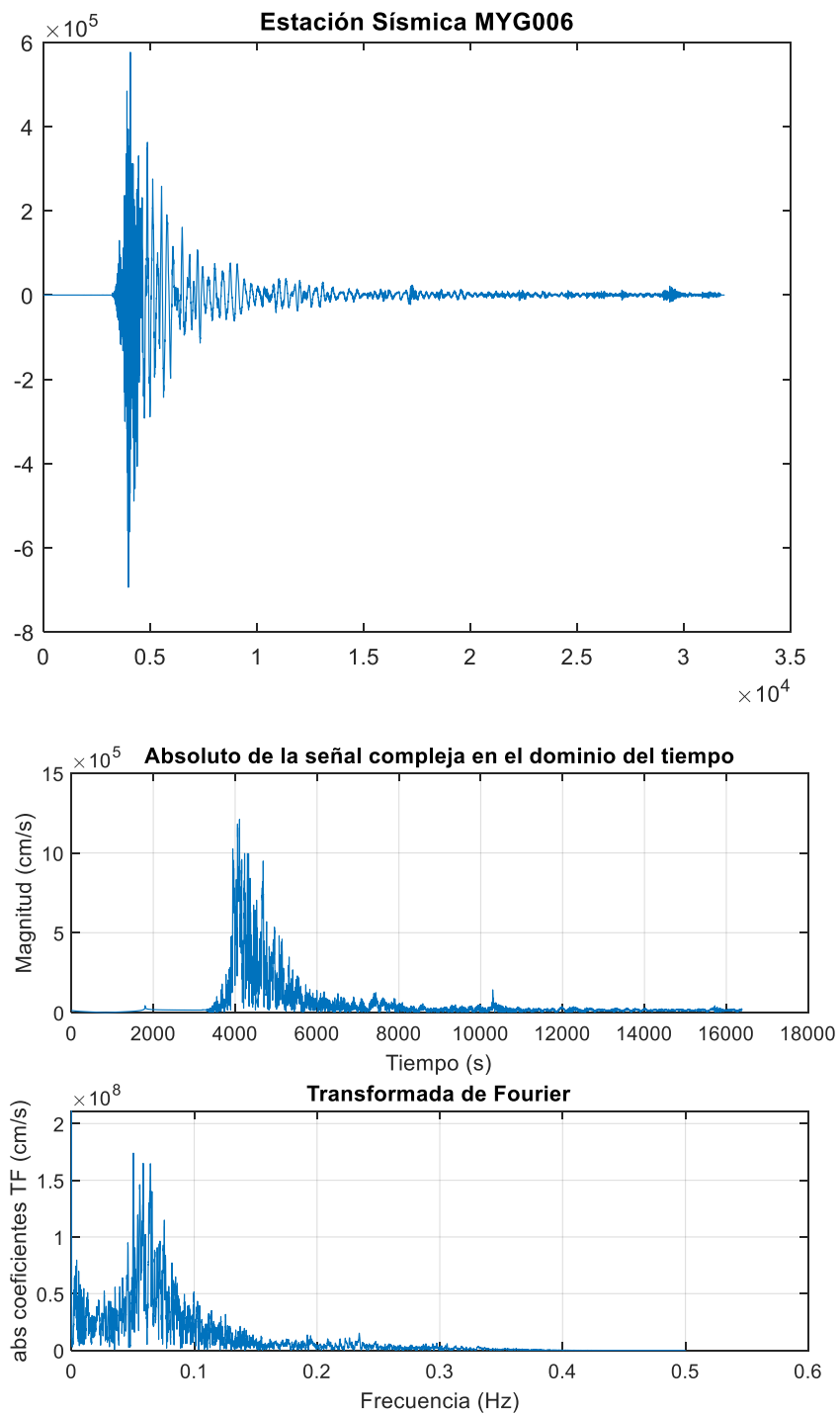


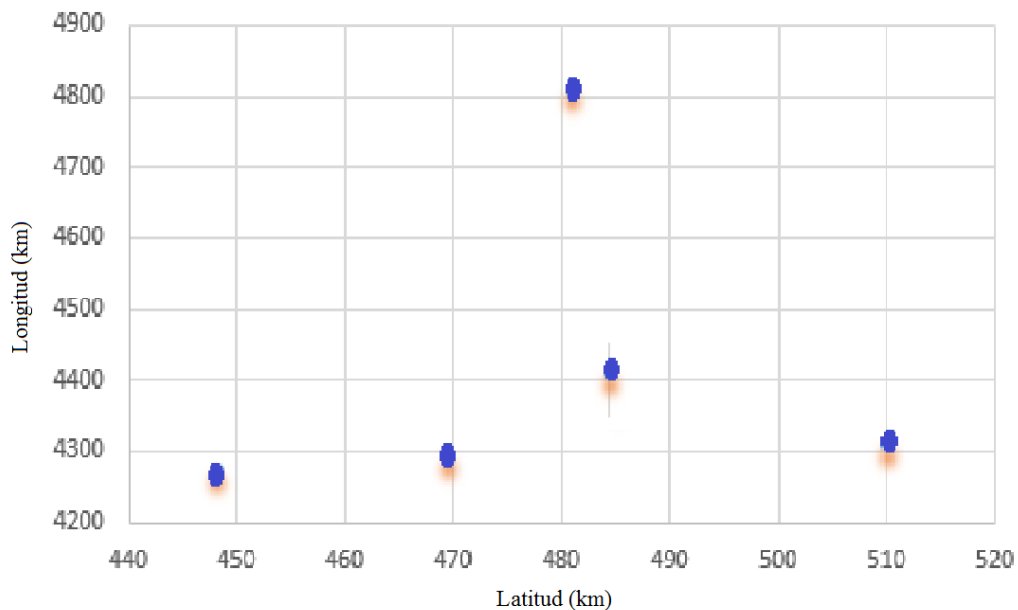
Figura 17 Señales correspondientes a la estación MYG006

Los epicentros propuestos en las iteraciones realizadas y empleados en el paso de esperanza se muestran en la tabla 4, las cuales son posiciones de 6 diferentes estaciones escogidas al azar, esto, al considerar que cada estación que registró el sismo es un posible epicentro.

*Tabla 4.* Posiciones para el paso E

<b>Punto</b>	<b>Latitud (km)</b>	<b>Longitud (km)</b>
<b>Pte1</b>	468.1539	4491.1282
<b>Pte2</b>	468.1539	4941.1282
<b>Pte3</b>	468.1539	4591.1282
<b>Pte4</b>	468.1539	2541.1282
<b>Pte5</b>	468.1539	4191.1282
<b>Pte6</b>	468.1539	4741.1282

En la figura 18 se muestran las diferentes posiciones propuestas para  $Pte_i$  resultantes en la  $i$ -ésima iteración, y como se mencionó, no varían con respecto a un solo eje (como en el ejemplo presentado en la metodología), si no que varían en 2, latitud y longitud.



a)



b)

Figura 18. a) Variación epicentral para la maximización de  $r(i)$  b) Variación de  $r^*$  como la maximización

Una vez que se ha determinado el argumento máximo para el parámetro  $r$  se procede al paso de maximización en el algoritmo EM-DPD, para obtener el epicentro del sismo. En la figura 18 se aprecian las posiciones de las estaciones sísmicas y el epicentro obtenido a través de algoritmo.

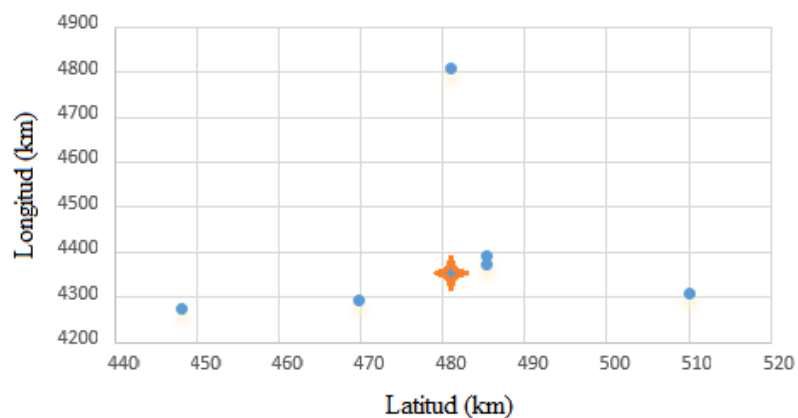


Figura 19. Posición de las estaciones sísmicas  $Pte(i)$  y el epicentro obtenido

## 4.2 Epicentro generado por el algoritmo EM-DPD a partir de las estaciones sísmicas

### MYG005, MYG006 y IWT015

El epicentro calculado por el algoritmo EM-DPD se encuentra en la posición  $x = 481$  km,  $y = 4352$  km, y como se puede observar, se encuentra en la zona de convergencia esperada. Las estaciones sísmicas se seleccionaron de manera aleatoria, que con relación a la distancia del epicentro original serían la 3, 4, y 10 como se muestra en la tabla 5.

Tabla 5. Orden de los sensores por distancia al origen del sismo

Posición por cercanía	Sensor	Distancia al epicentro (m)
1	AKT023	19891.23931
2	IWT010	23079.46756
3	MYG005	32246.70023
4	IWT015	33339.74851
5	MYG004	35362.25206
6	AKT019	37148.8128
7	IWT012	39400.72198
8	AKT017	40558.36659
9	IWT009	45293.12446
10	MYG006	50252.38556
11	IWT025	54426.91253
12	YMT006	62868.64373
13	AKT014	68866.51377
14	MYG010	75127.79887
15	MYG014	81633.43065

Durante la aplicación del algoritmo EM-DPD a las señales registradas por las distintas estaciones sísmicas consideradas y descritas por  $\mathbf{y}_i = \alpha_i \mathbf{A}_i \mathbf{s} + \mathbf{n}_i$  se observa que los diferentes valores calculados para las  $\alpha_i$  presentan variación y por consiguiente afectan la señal tanto en amplitud como en fase, pues es un vector complejo, las  $\mathbf{A}_i$  se concentran en la fase, y el parámetro  $\mathbf{s}$  corresponde al espectro de fuente, el cual es común a todas las señales, pues todas provienen de

un mismo emisor (epicentro). El análisis de  $\alpha_i A_i$  proporciona características de la trayectoria de la señal del epicentro a la estación sísmica.

La figura 19 muestra el resultado obtenido por el algoritmo EM-DPD que es de  $x = 480,936$  km,  $y = 435,1816$  km y el epicentro proporcionado por la red K-Net de Japón es  $x = 489,613$  km,  $y = 4319,891$  km. La diferencia lineal entre epicentros es de 33.337 km, y como se hizo referencia, el error de la localización del epicentro se aproxima generalmente a los 20 km. Se espera que el error se disminuya conforme se incremente el número de estaciones empleadas en el procedimiento.

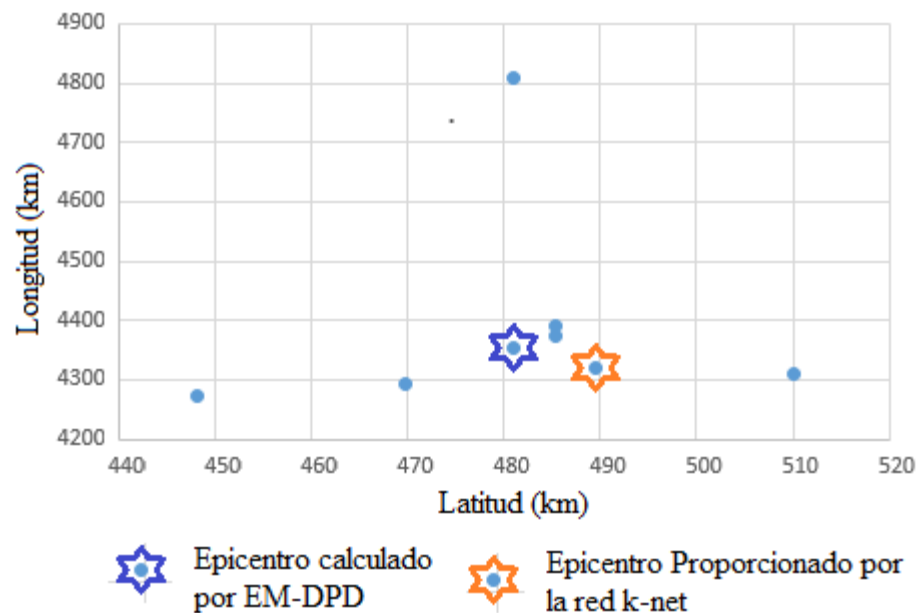


Figura 20. Epicentro estimado por el algoritmo EM-DPD y el proporcionado por la red K-net de Japón

En el proceso del algoritmo se observó que el hecho de proponer diferentes puntos iniciales como epicentro no modifica de manera considerable los valores obtenidos para el epicentro, es decir, la convergencia del algoritmo se conservó en la región esperada. En el anexo C se adjunta el algoritmo EM-DPD desarrollado en Matlab®.

### 4.3 Señales obtenidas después de considerar la variable alfa del proceso del algoritmo EM-DPD

El factor alfa  $\alpha_i$   $i = 1,2,3$  de la ecuación (45) modificó las transformadas de las señales registradas por las estaciones sísmicas durante el proceso EM-DPD. Tal que se considera que al dividir la señal original por el factor alfa  $\alpha_i$  se obtiene la señal de la fuente sísmica.

Al modificar la ecuación (45) queda

$$\frac{y_i}{\alpha_i} = A_i s \quad (61)$$

Se considera que  $A_i s$  es el espectro de fases ( $A_i$ ) multiplicado por el espectro de fuente ( $s$ ) que representa la señal emisora del sismo.

En las figuras 15, 16 y 17 se muestran las señales correspondientes a la modificación de la señal registrada por las estaciones sísmicas trabajadas por el factor alfa.

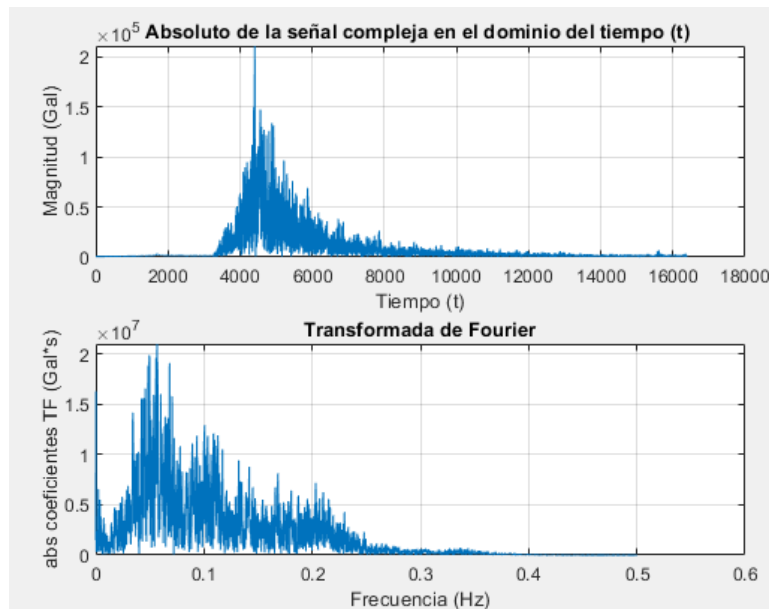


Figura 2.16 Espectro de amplitud  $s$  y su transformada de Fourier  $A_i$  (61) de la estación MYG005 alterada por el factor alfa

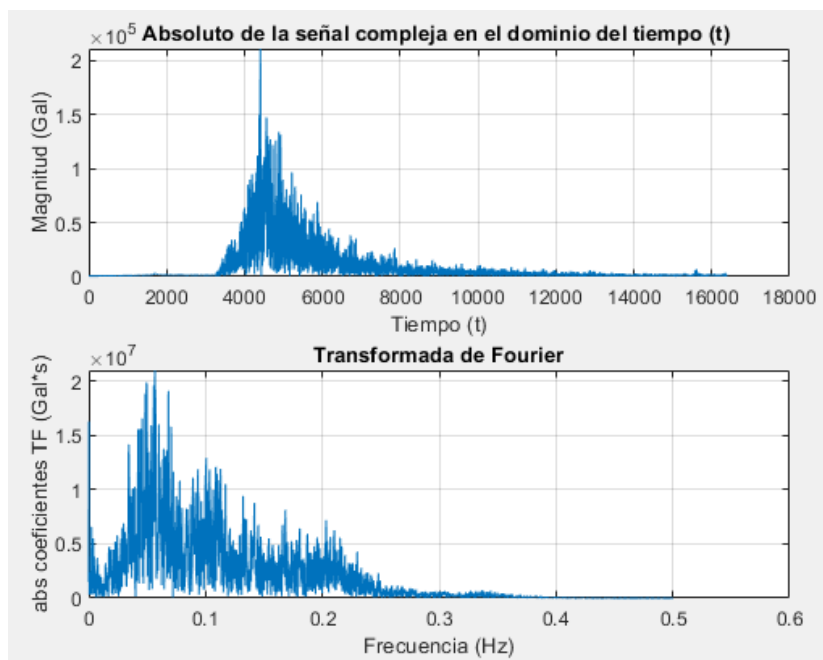


Figura 22 Espectro de amplitud s y su transformada de Fourier Ai (61) de la estación MYG006 alterada por el factor alfa

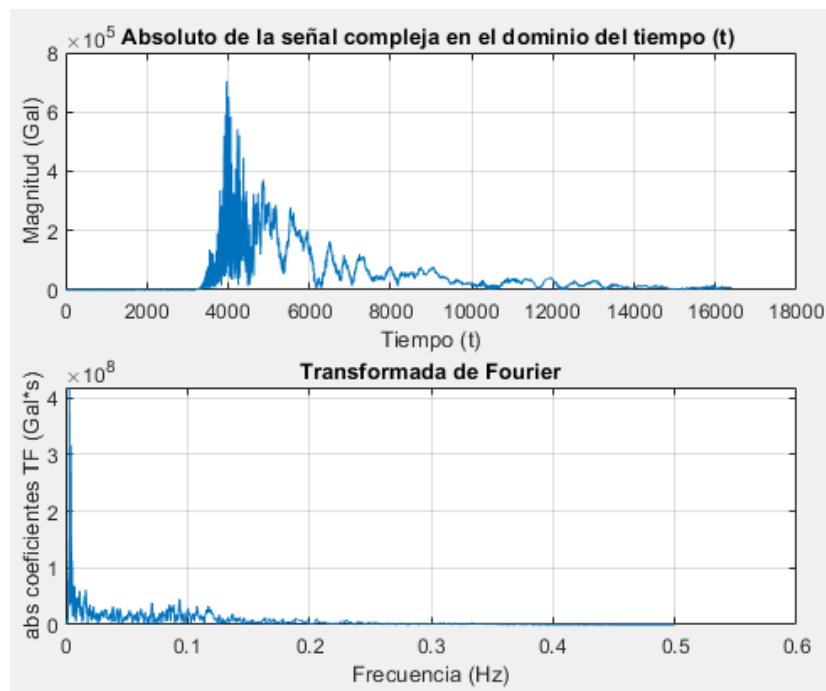


Figura 2317 Espectro de amplitud s y su transformada de Fourier Ai (61) de la estación IWT015 alterada por el factor alfa

Como se puede observar, los espectros de las figuras 15, 16 y 17 están afectados por los efectos de sitio. El desarrollo de los efectos de sitio queda para trabajos futuros para una aproximación a la señal de fuente.

## Conclusiones

El proyecto de investigación realizado adaptó satisfactoriamente el algoritmo EM-DPD usado para la detección de la trayectoria en tiempo real de un misil a la determinación del epicentro de un sismo.

La implementación y adaptación del algoritmo EM-DPD al caso sísmico requirió generar dos señales sintéticas a partir de la señal de la estación IWT010, alterando su magnitud y fase, permitiendo distinguir el efecto de una única fuente de emisión, permitiendo una convergencia adecuada del algoritmo para la estimación del epicentro.

La propuesta de las localizaciones de las estaciones IWT010, IWT025, YMT006, MYG005, AKT014 y IWT015 como elección de los puntos semilla permitió encontrar una probabilidad mayor en la determinación del epicentro. Para lograr esta aproximación fue necesario utilizar la transformada de Hilbert, la cual, permitió obtener la envolvente de la señal original de cada estación sin alterar sus características iniciales. Así mismo fue necesario utilizar la teoría de Fourier para descomponer las señales envolventes obtenidas por la aplicación de la transformada de Hilbert.

Al ser trasladadas a un plano frecuencial y al conservar sus características iniciales fue posible aplicar el algoritmo EM-DPD, el cual calcula la localización del emisor de la señal en un sismo directamente, tomando en cuenta la máxima probabilidad de la coordenada que sitúa al epicentro, llegando así a obtener la determinación de la localización del epicentro usando el algoritmo matemático EM-DPD propuesto por Tzoreff & Weiss (2017), quienes inicialmente lo propusieron para la radiolocalización de misiles. El método para el cálculo de este sismo fue de 0.661529 s y con un número de 20 iteraciones para converger.

## Bibliografía

- Anderson, K. R. (1981). Epicentral location using arrival time order. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 71(2), 541–545.
- Azzalini, A., & Genton, M. G. (2007). On Gauss's characterization of the normal distribution. *Bernoulli*, 13(1), 169–174. <https://doi.org/10.3150/07-BEJ5166>
- Barmin, M. P., Levshin, A. L., Yang, Y., & Ritzwoller, M. H. (2011). Epicentral location based on Rayleigh wave Empirical Green's Functions from ambient seismic noise. *Geophysical Journal International*, 184(2), 869–884. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2010.04879.x>
- Bondár, I., Myers, S. C., Engdahl, E. R., & Bergman, E. A. (2004). Epicentre accuracy based on seismic network criteria. *Geophysical Journal International*, 156(3), 483–496. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2004.02070.x>
- Canavos, G. C. (1988). Canavos Probabilidad y Estadística PARTE 1.
- Dempster, A. P., Laird, N. M., & Rubin, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 39(1), 1–38. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.2307/2984875>
- Gerardo, L., & Fraga, D. (2001). La Transformada Discreta de Fourier y la Transformada Rápida de Fourier, 1–15.
- Goswami, J. C., & Chan, A. K. (2011). *Fundamentals of wavelets: theory, algorithms, and applications* (Vol. 233). John Wiley & Sons.
- Han, M., Zhao, Y., Li, G., & Reynolds, A. C. (2011). Application of EM algorithms for seismic facies classification, 421–429. <https://doi.org/10.1007/s10596-010-9212-4>
- Isbi, Y. (2005). On the performance of direct position determination.
- Ochoa, L. H., Niño, L. F., & Vargas, C. A. (2018). Fast estimation of earthquake epicenter distance using a single seismological station with machine learning techniques. *DYNA (Colombia)*, 85(204), 161–168. <https://doi.org/10.15446/dyna.v85n204.68408>
- Pertsinidou, C. E., Tsaklidis, G., Papadimitriou, E., & Limnios, N. (2017). Application of hidden semi-Markov models for the seismic hazard assessment of the North and South Aegean Sea, Greece, 4763. <https://doi.org/10.1080/02664763.2016.1193724>
- Ramírez-Castro, R. I., & Montejó, L. A. (2011). Transformada de Hilbert, Descomposición Modal Empírica y sus Aplicaciones en el Análisis de Vibraciones Libres. *Revista Internacional de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil*, 11(2), 123–134. Retrieved from <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&profile=ehost&scope=site&authtype=crawler&jrnl=15350088&AN=71428026&h=GkR6o8n5QTj%2FJT2ZiivMG0tQSa%2FMoURLzk1%2FhtKf8HtnOFyd8nja1LkOjumdP3ztGKEOQRuLJ9VWVWZPG3kYumg%3D%3>

D&crl=c%0Ahttps://www.scipedia.com/pu

Rencher, A. C. (2012). *Methods of Multivariate Analysis, Second Edition. IIE Transactions* (Vol. 37). <https://doi.org/10.1080/07408170500232784>

Terremoto del interior de Iwate-Miyagi de 2008 - Wikipedia, la enciclopedia libre. (n.d.). Retrieved October 24, 2019, from [https://es.wikipedia.org/wiki/Terremoto\\_del\\_interior\\_de\\_Iwate-Miyagi\\_de\\_2008](https://es.wikipedia.org/wiki/Terremoto_del_interior_de_Iwate-Miyagi_de_2008)

Tood K., M., & stirling C., W. (2000). *Mathematical Methods and Algorithms for signal processing*, 938.

Tzoreff, E., & Weiss, A. J. (2017). Expectation-maximization algorithm for direct position determination. *Signal Processing*, 133(October 2016), 32–39. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2016.10.015>

Vasco, D. W., Nakagawa, S., Petrov, P., & Newman, G. (2019). Rapid estimation of earthquake locations using waveform traveltimes. *Geophysical Journal International*, 217(3), 1727–1741. <https://doi.org/10.1093/gji/ggz114>

Weiss, A. J. (2004). Direct position determination of narrowband radio frequency transmitters. *IEEE Signal Processing Letters*, 11(5), 513–516. <https://doi.org/10.1109/LSP.2004.826501>

Zohar, M., & Marco, S. (2012). Re-estimating the epicenter of the 1927 Jericho earthquake using spatial distribution of intensity data. *Journal of Applied Geophysics*, 82, 19–29. <https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2012.03.004>

## Anexos

### Anexo A

#### Demostración de algunas de las propiedades de Fourier

La transformada de Fourier de la función  $f(t) = \sin 2t$  en el intervalo  $(0, \pi)$  se obtiene de la forma siguiente:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$2\pi F(\omega) = \int_0^{\pi} e^{-i\omega t} \sin 2t dt$$

$$2\pi F(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 4} (2e^{-i\omega t} \cos 2t + i \sin 2t) \Big|_0^{\pi}$$

$$2\pi F(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 4} (2e^{-i\omega\pi} - 2)$$

$$2\pi F(\omega) = \frac{2}{\omega^2 - 4} (e^{-i\omega\pi} - 1) \quad (\text{A1})$$

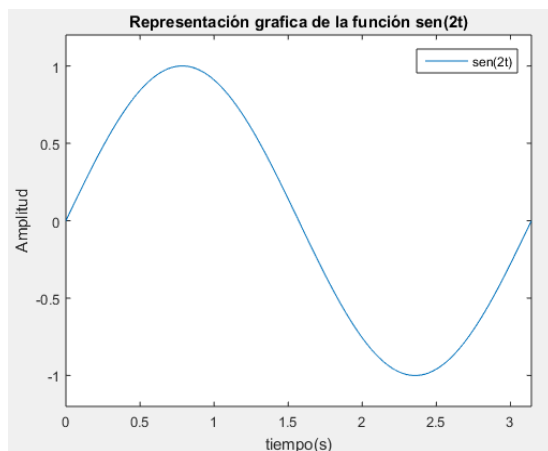
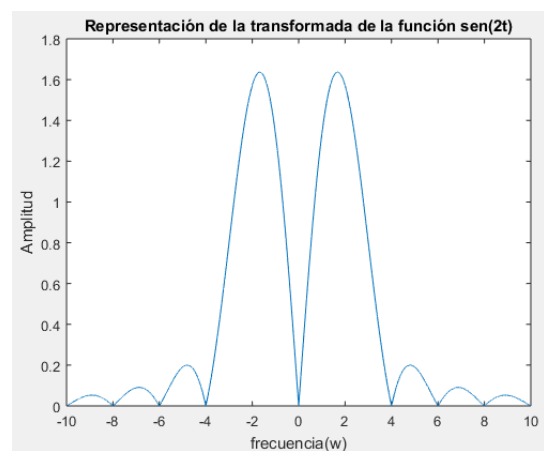


Figura 2418 a) Representación gráfica de la función  $\text{sen}(2t)$



b) Espectro de amplitudes de la Transformada de Fourier

En la figura 24 se pueden apreciar los dos dominios en los que la función seno puede ser representada; en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia respectivamente, en la transformada de Fourier del seno se puede apreciar que cuando la frecuencia se aproxima a  $\pm 2$  la función alcanza su máxima magnitud, y como se puede apreciar es la frecuencia central de la función  $f(t) = \sin 2t$ .

### Desplazamiento en tiempo.

Si se considera que la señal es desplazada en el tiempo por un factor de  $\frac{\pi}{4}$  entonces la transformada de Fourier es

$$2\pi F(\omega) = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} e^{-i\omega t} \sin 2\left(t - \frac{\pi}{4}\right) dt$$

$$2\pi F(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2 - 4} \left[ \frac{2}{\omega^2} e^{-i\omega\left(\frac{5\pi}{4}\right)} - \frac{2}{\omega^2} e^{-i\omega\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right]$$

$$2\pi F(\omega) = \frac{2}{\omega^2 - 4} e^{-i\omega\left(\frac{\pi}{4}\right)} [e^{-i\omega\pi} - 1] \quad (\text{A2})$$

Se puede observar que al comparar la transformada de las ecuaciones A1 y A2 solo están desfasadas por un factor de  $e^{-i\omega\left(\frac{\pi}{4}\right)}$  y en consecuencia solo afecta al espectro de fases.

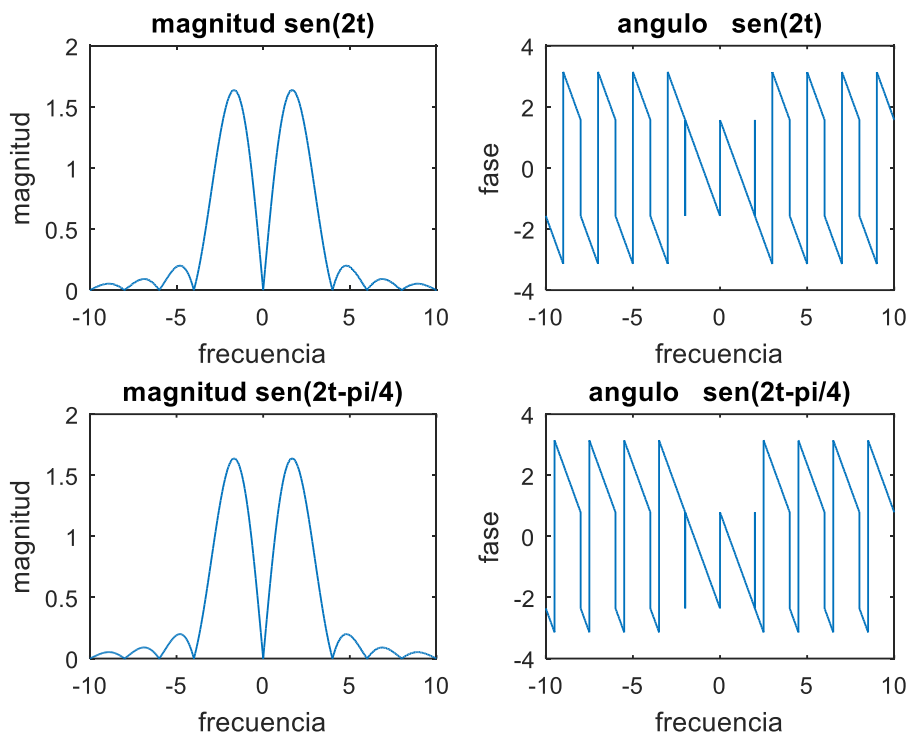


Figura 25. Transformada de Fourier de la función  $\sin(2t)$  y  $\sin(2t - \pi/4)$ , respectivamente en donde se observa que el espectro de fases no varía cuando hay un desplazamiento en el tiempo, solo se afecta el espectro de fases.

### Escalamiento en el tiempo

$$f(t) = \sin 2\left(\frac{t}{7}\right) \text{ para } t \in (0, 7\pi)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$2\pi F(\omega) = \int_0^{7\pi} e^{-i\omega t} \sin\left(\frac{2}{7}t\right) dt$$

$$= \frac{2 \cdot 7}{7^2 \omega^2 - 2^2} [e^{-i\omega(7\pi)} - 1]$$

$$\frac{\frac{2}{7}}{\omega^2 - \left(\frac{2}{7}\right)^2} [e^{-i\omega(7\pi)} - 1]$$

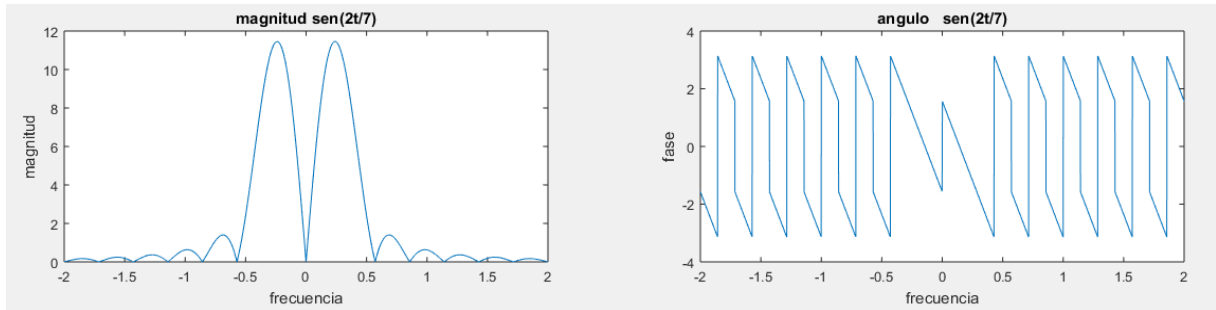


Figura 26 Transformada de Fourier de la función  $\text{sen}(2t/7)$ , gráfica de magnitud y ángulo de fase, respectivamente

Como se puede observar el espectro de magnitud de la Transformada de la función  $\text{sen}(2t)$  y la función  $\text{sen}(2t/7)$  es el mismo en forma y este último se ve afectado por un factor de 7, multiplicado en el eje de la amplitud y dividido en el eje de las frecuencias.

### Escalamiento y desplazamiento en el tiempo

$$f(t) = \sin 2 \left( \frac{t - \pi/4}{7} \right) \quad t \in \left( \frac{\pi}{4}, \frac{29}{4} \pi \right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$2\pi F(\omega) = \int_{\pi/4}^{\frac{29}{4}\pi} e^{-i\omega t} \sin \left( \frac{2}{7} t - \frac{\pi}{4} \right) dt$$

$$= \frac{\frac{2}{7}}{\omega^2 - \left(\frac{2}{7}\right)^2} \cdot e^{-i\omega\left(\frac{\pi}{4}\right)} [e^{-i\omega(7\pi)} - 1]$$

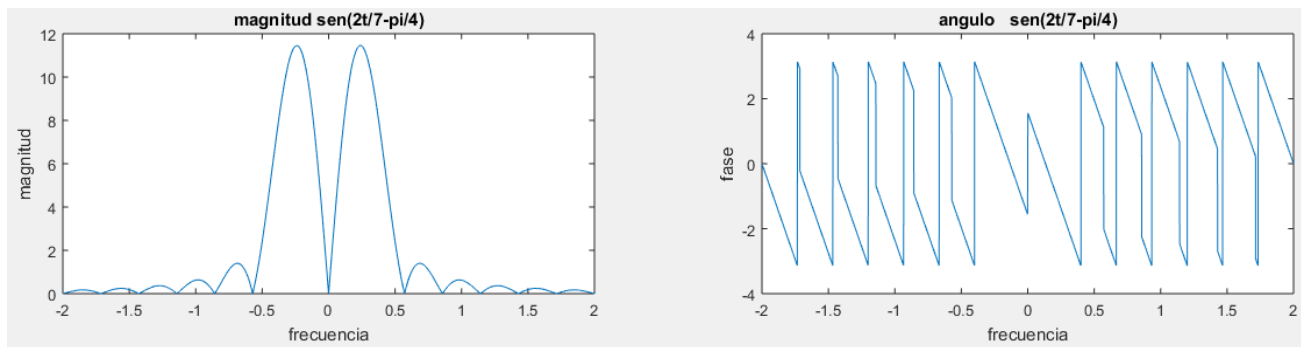


figura 27 Transformada de Fourier de función correspondiente espectro de amplitudes y fases respectivamente

**Anexo B**

```
%Programa para determinar el EM del ejemplo introductorio Pag40
```

```
x1= 31.5;
```

```
x2= 31.5;
```

```
x3=37;
```

```
p(1)=0;
```

```
y1=63;
```

```
for s=1:10
```

```
    x1= y1*((1/4)/(1/2 + p/4));
```

```
    x2= y1*((1/4+(p/4))/(1/2 + p/4));
```

```
    p=(2*x2-x3)/(x2+x3);
```

```
    A(s,1) =x1; A(s,2)=x2;A(s,3)=p;
```

```
end
```

## Anexo C

### Programa EM-DPD

```
%Posición de los sensores, dividido entre de 1000
```

```
Pse1=[485.3957,4374.1539];
Pse2=[469.6682,4294.5519];
Pse3=[501.8862,4286.7265];
```

```
%forma matricial
```

```
Pse=[Pse1;Pse2;Pse3];
%Posicion Propuesta para Pt
Pte=[485.1539,4391.1282];
Pte1=[510166.7,4309392.5];
Pte2=[485395.7,4374153.9];
Pte3=[448223.8,4272568.4];
Pte4=[469668.2,4294551.9];
Pte5=[461825.7,4382902.2];
Pte6=[480966.4,4352089.6];
```

```
% obtencion de la covarianza de los sensores
% y la varianza del ruido
```

```
sigma=ONE(15000:25000);
sig=cov(sigma);
```

```
rox=cov(Pse);
sigx=((rox(1,1)+rox(2,2))/2);
```

```
EPI=[489613.1,4319890.6]
```

```
% Transformacion de las señales
```

```
ht1=hilbert(ONE);
ht2=hilbert(TWO);
ht3=hilbert(THREE);
```

```
fftht1=(fftme(ht1,1,0,2^14,1))/10000;
fftht2=(fftme(ht2,1,0,2^14,1))/30000;
fftht3=(fftme(ht3,1,0,2^14,1))/50000;
fftht1=fftht1(:,1);
fftht2=fftht2(:,1);
fftht3=fftht3(:,1);
```

```
%probabilidad de gi Egi
```

```
gia=(fftht1-fftht1);
gib=(fftht2-fftht1);
gic=(fftht3-fftht1);
```

```
gil=(abs(gia)).^2;
gi2=(abs(gib)).^2;
gi3=(abs(gic)).^2;
```

```

Pg1=exp(-gi1/sig);
Pg2=exp(-gi2/sig);
Pg3=exp(-gi3/sig);

Eg1=(fftht1.*Pg1+fftht2.*Pg2+fftht3.*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);

gia=(fftht1-fftht2);
gib=(fftht2-fftht2);
gic=(fftht3-fftht2);
%
gi1=(abs(gia)).^2;
gi2=(abs(gib)).^2;
gi3=(abs(gic)).^2;

Pg1=exp(-gi1/sig);
Pg2=exp(-gi2/sig);
Pg3=exp(-gi3/sig);

Eg2=(fftht1.*Pg1+fftht2.*Pg2+fftht3.*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);

gia=(fftht1-fftht3);
gib=(fftht2-fftht3);
gic=(fftht3-fftht3);
%
gi1=(abs(gia)).^2;
gi2=(abs(gib)).^2;
gi3=(abs(gic)).^2;

Pg1=exp(-gi1/sig);
Pg2=exp(-gi2/sig);
Pg3=exp(-gi3/sig);

Eg3=(fftht1.*Pg1+fftht2.*Pg2+fftht3.*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);

% calculo de alfa Egi

hgi=conj(Eg1);
EgiH=transpose(hgi);
EgiHyi=EgiH*fftht1;
Es=transpose(conj(fftht1))*fftht1;

alf1=EgiHyi/Es;

hgi=conj(Eg2);
EgiH=transpose(hgi);
EgiHyi=EgiH*fftht2;
Es=transpose(conj(fftht2))*fftht2;
alf2=EgiHyi/Es;

hgi=conj(Eg3);
EgiH=transpose(hgi);

```

```

EgiHyi=EgiH*fftht3;
Es=transpose(conj(fftht3))*fftht3;
alf3=EgiHyi/Es;

%creación de a para evaluar magMuisFCL
a=1;

%Calculo de la norma de los insts al emisor

r1(a)=norm(Pse1-Pte);
r2(a)=norm(Pse2-Pte);
r3(a)=norm(Pse3-Pte);

%Calculo del valor esperado considerado como media r1

gia=(r1(a)-r1(a));
gib=(r2(a)-r1(a));
gic=(r3(a)-r1(a));

%
gi1=(abs(gia)).^2;
gi2=(abs(gib)).^2;
gi3=(abs(gic)).^2;

Pg1=exp(-gi1/sigx);
Pg2=exp(-gi2/sigx);
Pg3=exp(-gi3/sigx);

R1(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);

%Calculo del valor esperado considerado como media r2

gia=(r1(a)-r2(a));
gib=(r2(a)-r2(a));
gic=(r3(a)-r2(a));

%
gi1=(abs(gia)).^2;
gi2=(abs(gib)).^2;
gi3=(abs(gic)).^2;

Pg1=exp(-gi1/sigx);
Pg2=exp(-gi2/sigx);
Pg3=exp(-gi3/sigx);

R2(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);

%Calculo del valor esperado considerado como media r3

gia=(r1(a)-r3(a));
gib=(r2(a)-r3(a));
gic=(r3(a)-r3(a));

```

```

%
    gi1=(abs(gia)).^2;
    gi2=(abs(gib)).^2;
    gi3=(abs(gic)).^2;

    Pg1=exp(-gi1/sigx);
    Pg2=exp(-gi2/sigx);
    Pg3=exp(-gi3/sigx);

    R3(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);

a=1;
%Calculo de la norma de los insts al emisor

for pu=1:1

r1(a)=norm(Pse1-Pte);
r2(a)=norm(Pse2-Pte);
r3(a)=norm(Pse3-Pte);

%Calculo del valor esperado considerado como media r1

    gia=(r1(a)-r1(a));
    gib=(r2(a)-r1(a));
    gic=(r3(a)-r1(a));

%
    gi1=(abs(gia)).^2;
    gi2=(abs(gib)).^2;
    gi3=(abs(gic)).^2;

    Pg1=exp(-gi1/sigx);
    Pg2=exp(-gi2/sigx);
    Pg3=exp(-gi3/sigx);

    R1(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);

%Calculo del valor esperado considerado como media r2

    gia=(r1(a)-r2(a));
    gib=(r2(a)-r2(a));
    gic=(r3(a)-r2(a));

    gi1=(abs(gia)).^2;
    gi2=(abs(gib)).^2;
    gi3=(abs(gic)).^2;

    Pg1=exp(-gi1/sigx);
    Pg2=exp(-gi2/sigx);
    Pg3=exp(-gi3/sigx);

```

```

R2(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);

%Calculo del valor esperado considerado como media r3

gia=(r1(a)-r3(a));
gib=(r2(a)-r3(a));
gic=(r3(a)-r3(a));

%
gil=(abs(gia)).^2;
gi2=(abs(gib)).^2;
gi3=(abs(gic)).^2;

Pg1=exp(-gil/sigx);
Pg2=exp(-gi2/sigx);
Pg3=exp(-gi3/sigx);

R3(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);
end

a=2;
Pte=Pte2;
%Calculo de la norma de los insts al emisor

for pu=1:1

r1(a)=norm(Pse1-Pte);
r2(a)=norm(Pse2-Pte);
r3(a)=norm(Pse3-Pte);

%Calculo del valor esperado considerado como media r1

gia=(r1(a)-r1(a));
gib=(r2(a)-r1(a));
gic=(r3(a)-r1(a));

%
gil=(abs(gia)).^2;
gi2=(abs(gib)).^2;
gi3=(abs(gic)).^2;

Pg1=exp(-gil/sigx);
Pg2=exp(-gi2/sigx);
Pg3=exp(-gi3/sigx);

R1(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);

%Calculo del valor esperado considerado como media r2

```

```

    gia=(r1(a)-r2(a));
    gib=(r2(a)-r2(a));
    gic=(r3(a)-r2(a));

%
    gi1=(abs(gia)).^2;
    gi2=(abs(gib)).^2;
    gi3=(abs(gic)).^2;

    Pg1=exp(-gi1/sigx);
    Pg2=exp(-gi2/sigx);
    Pg3=exp(-gi3/sigx);

    R2(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);

%Calculo del valor esperado considerado como media r3

    gia=(r1(a)-r3(a));
    gib=(r2(a)-r3(a));
    gic=(r3(a)-r3(a));

    gi1=(abs(gia)).^2;
    gi2=(abs(gib)).^2;
    gi3=(abs(gic)).^2;

    Pg1=exp(-gi1/sigx);
    Pg2=exp(-gi2/sigx);
    Pg3=exp(-gi3/sigx);

    R3(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);
end

a=3;
Pte=Pte3;
%Calculo de la norma de los insts al emisor

for pu=1:1

r1(a)=norm(Pse1-Pte);
r2(a)=norm(Pse2-Pte);
r3(a)=norm(Pse3-Pte);

%Calculo del valor esperado considerado como media r1

    gia=(r1(a)-r1(a));
    gib=(r2(a)-r1(a));
    gic=(r3(a)-r1(a));

%
    gi1=(abs(gia)).^2;
    gi2=(abs(gib)).^2;
    gi3=(abs(gic)).^2;

```

```

Pg1=exp(-gi1/sigx);
Pg2=exp(-gi2/sigx);
Pg3=exp(-gi3/sigx);

R1(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);

%Calculo del valor esperado considerado como media r2

gia=(r1(a)-r2(a));
gib=(r2(a)-r2(a));
gic=(r3(a)-r2(a));

%
gi1=(abs(gia)).^2;
gi2=(abs(gib)).^2;
gi3=(abs(gic)).^2;

Pg1=exp(-gi1/sigx);
Pg2=exp(-gi2/sigx);
Pg3=exp(-gi3/sigx);

R2(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);

%Calculo del valor esperado considerado como media r3

gia=(r1(a)-r3(a));
gib=(r2(a)-r3(a));
gic=(r3(a)-r3(a));

%
gi1=(abs(gia)).^2;
gi2=(abs(gib)).^2;
gi3=(abs(gic)).^2;

Pg1=exp(-gi1/sigx);
Pg2=exp(-gi2/sigx);
Pg3=exp(-gi3/sigx);

R3(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);
end

a=4;
Pte=Pte4;
%Calculo de la norma de los insts al emisor

for pu=1:1

r1(a)=norm(Pse1-Pte);
r2(a)=norm(Pse2-Pte);

```

```

r3(a)=norm(Pse3-Pte);

%Calculo del valor esperado considerado como media r1

gia=(r1(a)-r1(a));
gib=(r2(a)-r1(a));
gic=(r3(a)-r1(a));

%
gil=(abs(gia)).^2;
gi2=(abs(gib)).^2;
gi3=(abs(gic)).^2;

Pg1=exp(-gil/sigx);
Pg2=exp(-gi2/sigx);
Pg3=exp(-gi3/sigx);

R1(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);

%Calculo del valor esperado considerado como media r2

gia=(r1(a)-r2(a));
gib=(r2(a)-r2(a));
gic=(r3(a)-r2(a));

%
gil=(abs(gia)).^2;
gi2=(abs(gib)).^2;
gi3=(abs(gic)).^2;

Pg1=exp(-gil/sigx);
Pg2=exp(-gi2/sigx);
Pg3=exp(-gi3/sigx);

R2(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);

%Calculo del valor esperado considerado como media r3

gia=(r1(a)-r3(a));
gib=(r2(a)-r3(a));
gic=(r3(a)-r3(a));

%
gil=(abs(gia)).^2;
gi2=(abs(gib)).^2;
gi3=(abs(gic)).^2;

Pg1=exp(-gil/sigx);
Pg2=exp(-gi2/sigx);
Pg3=exp(-gi3/sigx);

```

```

    R3(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);
end

a=5;
Pte=Pte5;
%Calculo de la norma de los insts al emisor

for pu=1:1

r1(a)=norm(Pse1-Pte);
r2(a)=norm(Pse2-Pte);
r3(a)=norm(Pse3-Pte);

%Calculo del valor esperado considerado como media r1

    gia=(r1(a)-r1(a));
    gib=(r2(a)-r1(a));
    gic=(r3(a)-r1(a));

%
    gi1=(abs(gia)).^2;
    gi2=(abs(gib)).^2;
    gi3=(abs(gic)).^2;

    Pg1=exp(-gi1/sigx);
    Pg2=exp(-gi2/sigx);
    Pg3=exp(-gi3/sigx);

    R1(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);

%Calculo del valor esperado considerado como media r2

    gia=(r1(a)-r2(a));
    gib=(r2(a)-r2(a));
    gic=(r3(a)-r2(a));

%
    gi1=(abs(gia)).^2;
    gi2=(abs(gib)).^2;
    gi3=(abs(gic)).^2;

    Pg1=exp(-gi1/sigx);
    Pg2=exp(-gi2/sigx);
    Pg3=exp(-gi3/sigx);

    R2(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);

%Calculo del valor esperado considerado como media r3

```

```

gia=(r1(a)-r3(a));
gib=(r2(a)-r3(a));
gic=(r3(a)-r3(a));

%
gi1=(abs(gia)).^2;
gi2=(abs(gib)).^2;
gi3=(abs(gic)).^2;

Pg1=exp(-gi1/sigx);
Pg2=exp(-gi2/sigx);
Pg3=exp(-gi3/sigx);

R3(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);
end

a=6;
Pte=Pte6;
%Calculo de la norma de los insts al emisor

for pu=1:1

r1(a)=norm(Pse1-Pte);
r2(a)=norm(Pse2-Pte);
r3(a)=norm(Pse3-Pte);

%Calculo del valor esperado considerado como media r1

gia=(r1(a)-r1(a));
gib=(r2(a)-r1(a));
gic=(r3(a)-r1(a));

%
gi1=(abs(gia)).^2;
gi2=(abs(gib)).^2;
gi3=(abs(gic)).^2;

Pg1=exp(-gi1/sigx);
Pg2=exp(-gi2/sigx);
Pg3=exp(-gi3/sigx);

R1(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);

%Calculo del valor esperado considerado como media r2

gia=(r1(a)-r2(a));
gib=(r2(a)-r2(a));
gic=(r3(a)-r2(a));

%
gi1=(abs(gia)).^2;

```

```

gi2=(abs(gib)).^2;
gi3=(abs(gic)).^2;

Pg1=exp(-gi1/sigx);
Pg2=exp(-gi2/sigx);
Pg3=exp(-gi3/sigx);

R2(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);

%Calculo del valor esperado considerado como media r3

gia=(r1(a)-r3(a));
gib=(r2(a)-r3(a));
gic=(r3(a)-r3(a));

%
gil=(abs(gia)).^2;
gi2=(abs(gib)).^2;
gi3=(abs(gic)).^2;

Pg1=exp(-gil/sigx);
Pg2=exp(-gi2/sigx);
Pg3=exp(-gi3/sigx);

R3(a)=(r1(a).*Pg1+r2(a).*Pg2+r3(a).*Pg3)./(Pg1+Pg2+Pg3);
end

for jl=1:200
%E STEP

vec1=(fft1t1-alf1*Eg1);
dot1=transpose(conj(vec1))*vec1;

vec2=(fft1t2-alf2*Eg2);
dot2=transpose(conj(vec2))*vec2;

vec3=(fft1t3-alf3*Eg3);
dot3=transpose(conj(vec3))*vec3;

for a=1:6

r_one(a)=- (r1(a)^2)/2+R1(a)*r1(a)-(.1*sigx/sig)*dot1;

r_two(a)=- (r2(a)^2)/2+R2(a)*r2(a)-(.1*sigx/sig)*dot2;

r_three(a)=- (r3(a)^2)/2+R3(a)*r3(a)-(.1*sigx/sig)*dot3;

end

```

```

    if r_one(1)>r_one(2) & r_one(1)>r_one(3) & r_one(1)>r_one(4) &
r_one(1)>r_one(5) & r_one(1)>r_one(6)
        a=1;
    else
        if r_one(2)>r_one(1) & r_one(2)>r_one(3) & r_one(2)>r_one(4) &
r_one(2)>r_one(5) & r_one(2)>r_one(6)
            a=2;
        else
            if r_one(3)>r_one(1) & r_one(3)>r_one(2) & r_one(3)>r_one(4) &
r_one(3)>r_one(5) & r_one(3)>r_one(6)
                a=3;
            else
                if r_one(4)>r_one(1) & r_one(4)>r_one(2) & r_one(4)>r_one(3) &
r_one(4)>r_one(5) & r_one(4)>r_one(6)
                    a=4;
                else
                    if r_one(5)>r_one(1) & r_one(5)>r_one(2) &
r_one(5)>r_one(3) & r_one(5)>r_one(4) & r_one(5)>r_one(6)
                        a=5;
                    else
                        a=6;
                    end
                end
            end
        end
    end
end

```

```

    if r_two(1)>r_two(2) & r_two(1)>r_two(3) & r_two(1)>r_two(4) &
r_two(1)>r_two(5) & r_two(1)>r_two(6)
        b=1;
    else
        if r_two(2)>r_two(1) & r_two(2)>r_two(3) & r_two(2)>r_two(4) &
r_two(2)>r_two(5) & r_two(2)>r_two(6)
            b=2;
        else
            if r_two(3)>r_two(1) & r_two(3)>r_two(2) & r_two(3)>r_two(4) &
r_two(3)>r_two(5) & r_two(3)>r_two(6)
                b=3;
            else
                if r_two(4)>r_two(1) & r_two(4)>r_two(2) & r_two(4)>r_two(3) &
r_two(4)>r_two(5) & r_two(4)>r_two(6)
                    b=4;
                else
                    if r_two(5)>r_two(1) & r_two(5)>r_two(2) &
r_two(5)>r_two(3) & r_two(5)>r_two(4) & r_two(5)>r_two(6)
                        b=5;
                    else
                        b=6;
                    end
                end
            end
        end
    end
end

```

```

    if r_three(1)>r_three(2) & r_three(1)>r_three(3) & r_three(1)>r_three(4) &
r_three(1)>r_three(5) & r_three(1)>r_three(6)
        c=1;
    else
        if r_three(2)>r_three(1) & r_three(2)>r_three(3) &
r_three(2)>r_three(4) & r_three(2)>r_three(5) & r_three(2)>r_three(6)
            c=2;
        else
            if r_three(3)>r_three(1) & r_three(3)>r_three(2) &
r_three(3)>r_three(4) & r_three(3)>r_three(5) & r_three(3)>r_three(6)
                c=3;
            else
                if r_three(4)>r_three(1) & r_three(4)>r_three(2) &
r_three(4)>r_three(3) & r_three(4)>r_three(5) & r_three(4)>r_three(6)
                    c=4;
                else
                    if r_three(5)>r_three(1) & r_three(5)>r_three(2) &
r_three(5)>r_three(3) & r_three(5)>r_three(4) & r_three(5)>r_three(6)
                        c=5;
                    else
                        c=6;
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end
end

```

```

Pte=(1/3)*((Pse1*(1-r1(a)/R1(a))+(r1(a)/R1(a))*Pte)+(Pse2*(1-
r2(a)/R2(a))+(r2(a)/R2(a))*Pte)+(Pse3*(1-r3(a)/R3(a))+(r3(a)/R3(a))*Pte)

```

```

% Recalculado las ffthti

```

```

fftht1=alf1*fftht1;
fftht2=alf2*fftht2;
fftht3=alf3*fftht3;

```

```

%probabilidad de gi Egi

```

```

gia=(fftht1-fftht1);
gib=(fftht2-fftht1);
gic=(fftht3-fftht1);

```

```

gi1=(abs(gia)).^2;
gi2=(abs(gib)).^2;
gi3=(abs(gic)).^2;

```

```

Pg1=exp(-gi1/sig);
Pg2=exp(-gi2/sig);
Pg3=exp(-gi3/sig);

Eg1=(fft1.*Pg1+fft2.*Pg2+fft3.*Pg3) ./ (Pg1+Pg2+Pg3);

gia=(fft1-fft2);
gib=(fft2-fft3);
gic=(fft3-fft2);

gi1=(abs(gia)).^2;
gi2=(abs(gib)).^2;
gi3=(abs(gic)).^2;

Pg1=exp(-gi1/sig);
Pg2=exp(-gi2/sig);
Pg3=exp(-gi3/sig);

Eg2=(fft1.*Pg1+fft2.*Pg2+fft3.*Pg3) ./ (Pg1+Pg2+Pg3);

gia=(fft1-fft3);
gib=(fft2-fft3);
gic=(fft3-fft3);

gi1=(abs(gia)).^2;
gi2=(abs(gib)).^2;
gi3=(abs(gic)).^2;

Pg1=exp(-gi1/sig);
Pg2=exp(-gi2/sig);
Pg3=exp(-gi3/sig);

Eg3=(fft1.*Pg1+fft2.*Pg2+fft3.*Pg3) ./ (Pg1+Pg2+Pg3);

hgi=conj(Eg1);
EgiH=transpose(hgi);
EgiHyi=EgiH*fft1;
Es=transpose(conj(fft1))*fft1;
alf1=EgiHyi/Es;

hgi=conj(Eg2);
EgiH=transpose(hgi);
EgiHyi=EgiH*fft2;
Es=transpose(conj(fft2))*fft2;
alf2=EgiHyi/Es;

```

```
hgi=conj(Eg3);  
EgiH=transpose(hgi);  
EgiHyi=EgiH*fftht3;  
Es=transpose(conj(fftht3))*fftht3;  
alf3=EgiHyi/Es;
```

```
end
```